



**Facultad
de
Ciencias**

Una demostración topológica del teorema de Nielsen-Schreier

A topological proof of the Nielsen-Schreier theorem.

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Autor: Alberto Campuzano Solórzano
Director: Dr. Fernando Etayo Gordejuela
Junio - 2026**

Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco.

Resumen

El Teorema de Nielsen-Schreier es un resultado fundamental de la teoría de grupos. Su enunciado es sencillo: Todo subgrupo de un grupo libre es libre. Sin embargo, pese a su naturaleza y formulación puramente algebraica, su demostración admite un elegante desarrollo desde la perspectiva de la topología algebraica. El presente trabajo tiene como objetivo introducir todas las herramientas necesarias para comprender y llevar a cabo dicha demostración, construyendo así el puente entre la estructura algebraica de este tipo de grupos y su significado topológico. Para ello, se define qué es un grupo libre y se establece su conexión con el grupo fundamental. Motivados por esta relación, se hace uso de la teoría de espacios recubridores y la correspondencia de Galois para traducir el problema de los subgrupos en recubrimientos de grafos topológicos. Con este camino, se concluye de manera autocontenida la demostración del teorema. En último lugar, se abordará el papel del axioma de elección, se contextualizará su significado y se implementará el resultado que garantiza la existencia de árbol maximal mediante el software de demostración interactivo Lean 4.

Palabras clave: Teorema de Nielsen-Schreier, Grupo libre, Grupo Fundamental, Rosa de n pétalos, Grafo Topológico, Axioma de elección, Lean 4.

Abstract

The Nielsen–Schreier Theorem is a fundamental result in group theory. Its statement is simple: every subgroup of a free group is itself free. However, despite its purely algebraic nature and formulation, its proof admits an elegant development from the perspective of algebraic topology. The aim of this work is to introduce all the necessary tools to understand and carry out such a proof, thereby building a bridge between the algebraic structure of these groups and their topological meaning. To this end, the notion of a free group is defined and its connection with the fundamental group is established. Motivated by this relationship, covering space theory and the Galois correspondence are employed to translate the problem of subgroups into one concerning coverings of topological graphs. Following this approach, a self-contained proof of the theorem is ultimately obtained. Finally, the role of the Axiom of Choice is examined, its significance is placed into context, and the result guaranteeing the existence of a maximal tree is implemented using the interactive theorem prover Lean 4.

Keywords: Nielsen-Schreier Theorem, Free group, Fundamental group, Bouquet of n circles, Topological graph, Axiom of Choice, Lean 4.

Agradecimientos

Con este trabajo pongo fin a mi etapa como estudiante del grado en matemáticas. Mi caso particular, como doblegradista de la Universidad de Cantabria, ha ido siempre de la mano del grado en Física. Fue precisamente ese el que siempre había querido hacer, y como un hermoso e inesperado *daño colateral*, me vi adentrándome en el mundo de las matemáticas. Cuando me preguntan sobre mi decisión siempre respondo de la misma manera: "No puedo imaginar hacer de nuevo solo una de las dos carreras" y este es el final de este pequeño camino, pero no del sendero. En estos últimos cinco años la protagonista principal ha sido la transición a la vida adulta, marcada naturalmente por la gran responsabilidad y exigencia que requiere el grado en Matemáticas. Por ello, no puedo olvidarme de aquellas personas que han estado siempre ahí y que con una rotundidad categórica se que siempre estarán. Mi familia, referente y causa de que sea la persona que soy hoy, en particular mis padres. Gracias a vosotros he conseguido definirme a mi mismo, con mis virtudes e innumerables defectos, porque habéis dado todo por mí y nunca seré capaz de devolver el esfuerzo que ha sido dedicado. Mencionar también la aparición durante este tiempo de lo que se ha convertido en mi segundo hogar, la familia Postigo-Díaz. Mi pareja, Natalia, y con especial cariño a sus padres, Leandro y Alicia, su hermano Dani y a mis pequeños Bimba y Linux. Gracias desde la más profunda sinceridad, porque me habéis apoyado como si fuera uno más.

No puedo dejar de lado tampoco a mis amigos, en particular, a Clara, David y Silvia. Me habéis acompañado, aguantado y de manera increíble seguís estando conmigo. Gracias porque sin vosotros tampoco hubiera sido posible. Dejo gente sin nombrar pero sin duda, a todos aquellos que aquí habéis estado, gracias.

A mi director, Fernando. Si hay alguien en esta Facultad que es capaz de transmitir la pasión, importancia y riqueza de las matemáticas eres tú. No solo porque hayas sido mi tutor de este TFG, para mí y para muchos estudiantes eres uno de los mejores profesores que hemos tenido y mereces ese reconocimiento. De tí he aprendido que la sublime belleza de las matemáticas solo puede verse parcialmente eclipsada por la eternidad de su discurso. La lengua con la que hablamos cambia, el mundo por el que andamos evoluciona pero los teoremas, los lemas, incluso aquellos resultados falsos a los que damos contraejemplos permanecerán a perpetuidad, estemos o no estemos nosotros para nombrarlo. Eso es bajo mi punto de vista una de las mayores hazañas de la que puede presumir el *Ser humano*. Hacia donde sea que se torne mi camino, siempre llevaré conmigo esa tinta matemática que hace especial a las personas que se dedican a esta disciplina.

Finalmente, quiero hacerte una especial mención a ti, Deva, porque estés donde estés sé que has seguido viniendo a despedirte de mí cada vez que subía al coche para ir a la universidad y que lo seguirás haciendo en esta nueva etapa de mi vida. Tu ausencia es irreparable, pero el bonito recuerdo que dejaste en nuestras memorias perdurará y aquí, en mi cabeza, estarás siempre.

Muchas gracias a todos.

Índice general

1	Introducción	1
2	Preliminares algebraicos y topológicos	3
2.1	Grupos	3
2.1.1	Grupo cociente y Teorema de isomorfía	4
2.1.2	Grupos libres y presentaciones	7
2.1.3	Teoría de categorías	9
2.2	Topología	10
2.2.1	Caminos y Homotopías	11
2.2.2	Grupo fundamental	14
2.2.3	Algunos grupos fundamentales.	16
3	Topología de los Grupos Libres	19
3.1	El Teorema de Seifert-van Kampen	19
3.1.1	El grupo fundamental de la rosa de n pétalos	23
3.2	Espacios Recubridores y Levantamientos	25
3.2.1	Espacios recubridores	26
3.2.2	Levantamientos	28
3.2.3	Recubridor Universal	30
3.2.4	Correspondencia de Galois	32
4	Grafos Topológicos	33
4.1	Complejos y Grafos Topológicos	33
4.2	Árboles Maximales y el Grupo Fundamental de un Grafo	35
4.3	El Lema Fundamental de Recubridores	37
5	El Teorema de Nielsen-Schreier	39
5.1	Enunciado y Demostración	39
6	Conclusiones y Reflexión Final	41
6.1	Conclusiones	41
6.2	Reflexión final	41
	Bibliografía	43
A	Sobre el axioma de elección y su Formalización	v
A.1	El axioma de elección	v
A.1.1	Contexto Histórico	vi
A.1.2	El Lema de Zorn	vi
A.2	Formalización en Lean 4	vii

A.2.1	Relación con la lógica constructiva y clásica	vii
A.2.2	Demostración inductiva y código	vii
B	Demostraciones auxiliares	xiii

Índice de figuras

1.1	Intuición del Teorema Fundamental del Álgebra	1
2.1	Clases laterales del grupo S_3	5
2.2	Diagrama conmutativo del Primer Teorema de	7
2.3	Diagrama de la propiedad universal	8
2.4	Representación geométrica de caminos cerrados sobre la esfera S^2 y T^2	11
2.5	Representación gráfica de la noción de homotopía	12
2.6	Representación de la contracción de lazos en $\mathbb{R}^2$ y S^2	16
2.7	Retracto del plano agujereado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$	17
2.8	Visualización del plano agujereado como un cilindro.	18
3.1	Diagrama conmutativo (<i>pushout</i>) de la propiedad universal del producto libre	20
3.2	Representación de la rosa de n -pétalos.	20
3.3	Recubrimiento de la esfera S^2 mediante abiertos contráctiles.	22
3.4	Comparación entre unión disjunta y unión con identificación puntual	23
3.5	Deformación del conjunto U en la rosa de $n - 1$ -pétalos.	24
3.6	Deformación del conjunto V en la circunferencia S^1	24
3.7	Retracción de $U \cap V$ en el punto central x_0 de la rosa de n -pétalos.	24
3.8	Comparación entre el Toro y la Rosa de 2 pétalos	25
3.9	Visualización del recubrimiento de $\mathbb{R}$ sobre S^1	26
3.10	Propiedad universal del recubridor universal	30
3.11	El pendiente hawaiano	31
4.1	Colapso de un árbol maximal en un grafo cuadrado con diagonal.	36

Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco.

Introducción

“Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes es porque están hechos de ideas”

G. H. Hardy

La demostración de resultados fundamentales en matemáticas suele estar sujeta a incontables horas de trabajo y años de pequeños hitos que acaban culminando en el resultado esperado. A menudo, estos pasos están fuertemente ligados al campo en el que se originan, dejando poco espacio a argumentos transversales. Un gran ejemplo de la riqueza que aporta la interacción entre disciplinas es el Teorema Fundamental del Álgebra. Aunque su enunciado es estrictamente algebraico, carece de una demostración puramente algebraica. Las aproximaciones primitivas resultaban técnicamente complicadas.

Por el contrario, otras ramas de las matemáticas ofrecen pruebas mucho más elegantes. Desde el Análisis Complejo, por ejemplo, basta con suponer por reducción al absurdo que un polinomio carece de raíces y aplicar el Teorema de Liouville a su función inversa de manera que se llega a la contradicción de que el polinomio ha de ser constante. Aún más visual resulta la perspectiva que ofrece la topología algebraica mediante el concepto de homotopía y el índice de una curva. Si consideramos la imagen de una circunferencia de radio suficientemente grande bajo la acción de un polinomio, esta rodeará el origen tantas veces como indique su grado. Al encoger el radio de la circunferencia original de forma continua hasta cero, la curva debe colapsar en el punto que representa el término independiente $p(0)$, obligándola a cruzar el origen.

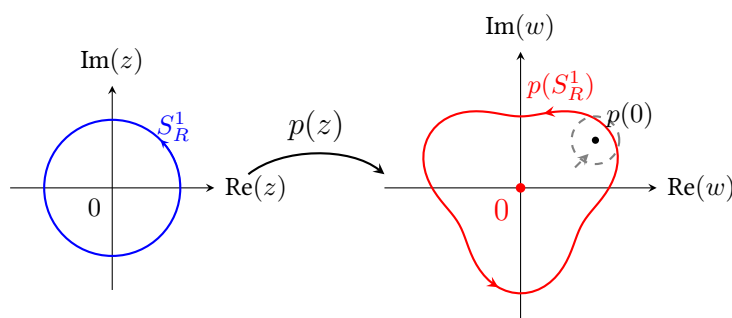


Figura 1.1: Intuición topológica del Teorema Fundamental del Álgebra: La homotopía de la curva con el punto $p(0)$ fuerza la intersección con el cero, implicando la existencia de una raíz.

El Teorema de Nielsen-Schreier comparte esta misma narrativa histórica e interdisciplinar. Sus primeras formulaciones, desarrolladas por Jakob Nielsen [Nie21] y Otto Schreier [Sch27], exigían una técnica algebraica que contrasta drásticamente con la visión que se va a dar en el presente Trabajo Fin de Grado (TFG). El objetivo central es desarrollar y detallar de manera autocontenida la demostración topológica de este teorema, evidenciando cómo el estudio algebraico de los subgrupos de un grupo libre puede transformarse en el análisis del grupo fundamental de grafos topológicos y la teoría de espacios recubridores. Tradicionalmente, la topología algebraica se ha utilizado como una vía para resolver problemas topológicos mediante su traducción a estructuras algebraicas. En este trabajo, sin embargo, se lleva a cabo el camino inverso: nos valdremos de las propiedades de los espacios topológicos para resolver un problema intrínseco del álgebra.

Por la propia naturaleza de una memoria de grado, una fracción considerable del *corpus* teórico desarrollado sintetiza la extensa literatura matemática clásica. Herramientas fundamentales como el Teorema de Seifert-van Kampen o la correspondencia de Galois no son resultados propios, sino el andamiaje necesario para construir nuestro marco de trabajo. Más allá de ejemplos, ilustraciones y una narrativa propia con la que se pretende ser capaz de corroborar que se han comprendido e interiorizado los conocimientos expuestos, este TFG aporta un enfoque marcadamente novedoso en su recta final: la formalización del árbol maximal empleando un demostrador interactivo de teoremas. Este esfuerzo introduce un paradigma totalmente innovador respecto de los conocimientos adquiridos en el Grado.

Estructuralmente, el trabajo se desarrolla de la siguiente forma:

Capítulo 2 Se asientan los conceptos algebraicos necesarios para comprender la noción de grupo libre y se motiva la definición de grupo fundamental, con el fin de poder introducir en los capítulos posteriores las herramientas técnicas que rodean al Teorema de Nielsen-Schreier.

Capítulo 3 Constituye el primer nexo de unión entre ambas ramas. Se introduce la propiedad universal del producto libre y se enuncia el Teorema de Seifert-van Kampen. Los resultados centrales de esta sección son el cálculo del grupo fundamental de la rosa de n pétalos y la deducción de la correspondencia de Galois, la cual garantiza una biyección entre los subgrupos del grupo fundamental y los espacios recubridores conexos por caminos.

Capítulo 4 Se formaliza el entorno de los grafos topológicos y se proporciona la estructura necesaria para justificar la relación entre los subgrafos de la rosa de n pétalos como grafo.

Capítulo 5 Supone la culminación matemática del objetivo principal. Ensamblando la maquinaria descrita en los capítulos anteriores se lleva a cabo la demostración completa del Teorema de Nielsen-Schreier: se representa al grupo libre como el grupo fundamental de una rosa de n pétalos, se invoca la teoría de recubrimientos para sus subgrupos, y se concluye, tras colapsar su árbol maximal, que todo subgrupo del grupo original es libre.

Capítulo 6 Finalmente, se reflexiona acerca de la elaboración de esta memoria y del significado de la culminación de mis estudios en la Universidad de Cantabria.

Apéndices: En los anexos de este trabajo se incluyen resultados y demostraciones auxiliares y una extensión del cuerpo principal en la que se analiza el papel fundamental e histórico del axioma de elección. Adicionalmente, se trata de computar la demostración de la existencia de árbol maximal en Lean 4, un lenguaje de programación basado en el Cálculo de Construcciones Inductivas (CiC).

Preliminares algebraicos y topológicos

Como es habitual en matemáticas, el uso o la intuición de ciertos objetos son anteriores a su definición formal. En un primer lugar se concibe el concepto, más tarde se comprende cómo ha de definirse rigurosamente y posteriormente se refina la notación y los resultados. El *grupo* es introducido por primera vez por Évariste Galois en 1831 en su «*Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*»¹ [Gal46]. En esta memoria, el francés hace referencia explícita al grupo de permutaciones:

Théorème. « Soit une équation donnée, dont $a, b, c, \dots$ sont les » m racines. » $a, h, c, \dots$ qui jouira de la propriété suivante : « Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres $a, b, c, \dots$ qui jouira de la propriété suivante:

- I Que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue.
- II Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.

No fue, sin embargo, hasta 1854 cuando Arthur Cayley, en su artículo «*On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$* » [Cay54], definió de manera abstracta y formal los grupos.

A lo largo de este capítulo se repasarán conceptos y resultados con el fin de poder profundizar a continuación en las herramientas necesarias para desarrollar la demostración del Teorema de Nielsen-Schreier. Así, para esta parte inicial se han seguido [Ale05] y [Mas91], dos referencias introductorias clásicas para la teoría de grupos y la conexión con la topología algebraica.

2.1 Grupos

Fundamentalmente, la idea de grupo consiste en dotar a un conjunto de una operación binaria con buen comportamiento. Para entender esto es necesario introducir los distintos integrantes del concepto.

Definición 2.1.1 (Operación). Sea G un conjunto no trivial. Toda aplicación $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que asocia a cada par ordenado de elementos un único valor en G recibe el nombre de *operación interna* o *ley de composición*.

¹Esta fue la primera memoria escrita por Galois, rechazada por la Academia de París en aquel momento y que daría lugar a su artículo «*Des équations primitives qui sont solubles par radicaux*» y a la célebre carta escrita a Auguste Chevalier poco antes de su muerte.

Definición 2.1.2 (Grupo y Subgrupo). Sea G un conjunto dotado de una operación interna $\cdot$, decimos que el par $(G, \cdot)$ es un *grupo* si verifica lo siguiente:

- **Propiedad asociativa:** $\forall f, g, h \in G$, se cumple $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.
- **Elemento neutro:** $\exists e \in G$ tal que $\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g$.
- **Existencia de inverso:** $\forall g \in G, \exists \tilde{g} \in G$ tal que $g \cdot \tilde{g} = \tilde{g} \cdot g = e$.

Si $H \subseteq G$ es un subconjunto no vacío que hereda la estructura de grupo con la misma operación restringida $\cdot|_H$, decimos que H es un *subgrupo* y lo denotamos como $H \leq G$.

Ejemplo 2.1.3. Algunos ejemplos fundamentales de la teoría de grupos son:

- El par $(\mathbb{Z}, +)$ de los enteros con la suma.
- El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$, formado por las matrices invertibles $n \times n$ con el producto matricial. Este grupo ilustra que, en general, la operación de un grupo no tiene por qué ser conmutativa.
- Los grupos de simetría $O(n)$ o el grupo unitario $U(n)$, los cuales tienen un papel elemental en el desarrollo de la relatividad general y la mecánica cuántica, entre otros.

2.1.1 Grupo cociente y Teorema de isomorfía

Al estudiar la estructura de un grupo G , resulta natural plantearse si existe, y en tal caso cuál es, la forma que presentan sus subgrupos. En particular, el interés recae sobre aquellos que son capaces de compactar los elementos del grupo total. Esta noción se formaliza mediante una relación de equivalencia y la introducción del *espacio cociente*.

Definición 2.1.4 (Clases laterales). Dado un grupo G y un subgrupo $H \leq G$, definimos la relación de equivalencia $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$. La clase de equivalencia de un elemento $g \in G$ bajo esta relación es el conjunto $gH = \{gh \mid h \in H\}$, denominado *clase lateral por la izquierda* de H en G . Análogamente, definiendo $xy^{-1} \in H$, obtenemos las *clases laterales por la derecha* Hg .

En general, la partición generada por las clases por la izquierda no coincide con la de las clases por la derecha ($gH \neq Hg$) tal y como ilustra el Ejemplo 2.1.6. Cuando ambas particiones coinciden, el subgrupo recibe el nombre de *subgrupo normal*.

Definición 2.1.5 (Subgrupo normal). Un subgrupo $N \leq G$ es un *subgrupo normal* si satisface que $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$. En tal caso, lo denotamos como $N \trianglelefteq G$. Equivalentemente, sus clases por la izquierda y por la derecha coinciden ($gN = Ng$).

Ejemplo 2.1.6. Consideremos el grupo simétrico S_3 , formado por todas las permutaciones de tres elementos (el mismo grupo de permutaciones que motivó los primeros teoremas de Galois mencionados al inicio del capítulo). Tomemos como subgrupo H al generado por la trasposición de los dos primeros elementos, es decir, $H = \{id, (1\ 2)\}$. Si calculamos la clase lateral por la izquierda tomando el elemento $g = (1\ 3)$, componiendo de derecha a izquierda obtenemos:

$$gH = (1\ 3)H = \{(1\ 3) \circ id, (1\ 3) \circ (1\ 2)\} = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

Sin embargo, si calculamos la clase lateral por la derecha con el mismo elemento g :

$$Hg = H(1\ 3) = \{id \circ (1\ 3), (1\ 2) \circ (1\ 3)\} = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Es evidente que $gH \neq Hg$. Este cálculo demuestra de manera explícita que la partición del grupo inducida por las clases por la izquierda difiere de la inducida por la derecha y, en consecuencia, H no es un subgrupo normal de S_3 .

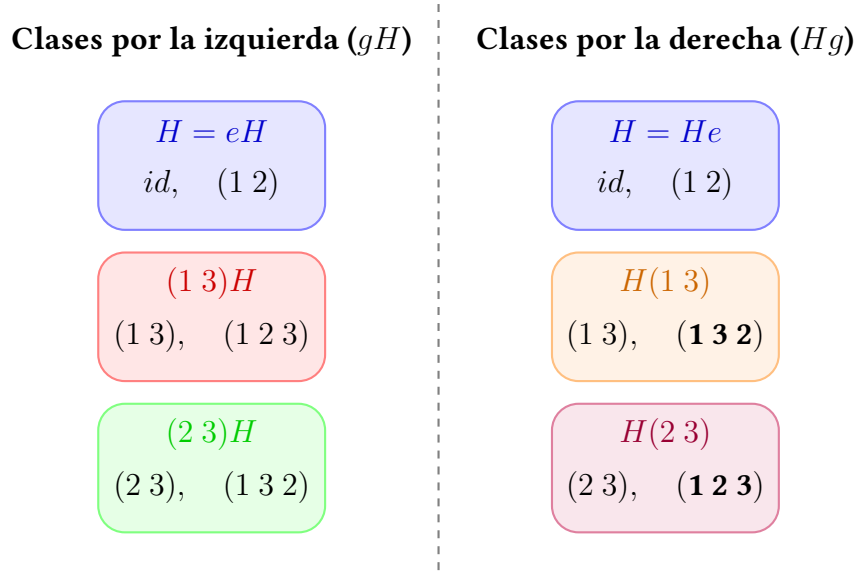


Figura 2.1: Comparación de las particiones del grupo S_3 inducidas por el subgrupo $H = \{id, (1\ 2)\}$. Aunque la clase del propio subgrupo H se mantiene idéntica, los elementos de orden 3, $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 3\ 2)$, se distribuyen en clases diferentes dependiendo de si multiplicamos por la izquierda o por la derecha. Esto evidencia que $gH \neq Hg$, y por tanto H no es normal en S_3 .

La condición de normalidad no es superflua. Mediante la siguiente proposición observamos que, dado un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$, podemos dotar al conjunto de las clases de equivalencia (el espacio cociente G/N) de estructura de grupo. Esto nos permite construir nuevos grupos bajo esa idea de *compactar* todos los elementos de N hasta convertirlos en el elemento neutro.

Proposición 2.1.7 (Grupo cociente). *Sea $N \trianglelefteq G$. La operación $\cdot : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ definida como $(aN)(bN) = (ab)N$ dota al conjunto G/N de estructura de grupo, denominado grupo cociente.*

Demostración. En primer lugar, debemos comprobar que la operación está bien definida, es decir, que no depende del representante elegido para la clase. Una vez hayamos logrado este paso, se seguirán de manera directa las condiciones de la Definición 2.1.2.

Supongamos que $aN = cN$ y $bN = dN$. Esto implica que existen $n_1, n_2 \in N$ tales que $c = an_1$ y $d = bn_2$. Evaluando el producto de los nuevos representantes tenemos:

$$cd = (an_1)(bn_2) = ab(b^{-1}n_1b)n_2$$

Dado que N es un subgrupo normal, sabemos que $b^{-1}n_1b = n_3 \in N$. Por tanto:

$$cd = ab(n_3n_2) \implies cd \in (ab)N \implies (cd)N = (ab)N$$

La operación está bien definida. La asociatividad se hereda directamente de G , el elemento neutro es la clase $eN = N$, y el inverso de aN es $a^{-1}N$, por lo queda concluida la demostración. $\square$

Acabamos esta sección enunciando y demostrando el Primer Teorema de Isomorfía. Este resultado, en su forma moderna, se debe a la brillante *Emmy Noether*. Su importancia radica en que se establece el vínculo entre los homomorfismos, los subgrupos normales y los grupos cociente.

Teorema 2.1.8 (Primer Teorema de Isomorfía). *Sean G y H dos grupos y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces, el núcleo de la aplicación, denotado por $\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$, es un subgrupo normal de G ($\ker(f) \trianglelefteq G$), y se verifica que el grupo cociente $G/\ker(f)$ es isomorfo a la imagen de f :*

$$G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

Demostración. Definimos la aplicación inducida al cociente $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ mediante la regla $\bar{f}(g\ker(f)) = f(g)$. Probemos que la aplicación está bien definida y pasemos a ver que se verifican las condiciones de isomorfismo.

- **Bien definida:** Supongamos que tomamos dos representantes distintos para la misma clase lateral, es decir, $a\ker(f) = b\ker(f)$. Esto implica que $b^{-1}a \in \ker(f)$. Aplicando el homomorfismo f , tenemos que $f(b^{-1}a) = e_H$, lo que por propiedades de homomorfismos se traduce en $f(b)^{-1}f(a) = e_H$, y por tanto $f(a) = f(b)$. Luego $\bar{f}(a\ker(f)) = \bar{f}(b\ker(f))$, independientemente del representante.

- **Homomorfismo:** Dados dos elementos del cociente,

$$\bar{f}((a\ker(f))(b\ker(f))) = \bar{f}(ab\ker(f)) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(a\ker(f))\bar{f}(b\ker(f))$$

- **Sobreyectiva:** Sea $y \in \text{Im}(f)$. Por definición de imagen, existe algún $x \in G$ tal que $f(x) = y$. Entonces, la clase $x\ker(f)$ verifica que $\bar{f}(x\ker(f)) = f(x) = y$.
- **Inyectiva:** Supongamos que $\bar{f}(g\ker(f)) = e_H$. Entonces $f(g) = e_H$, lo que significa por definición que $g \in \ker(f)$. En términos de clases laterales, si un elemento pertenece al subgrupo, su clase es la clase trivial: $g\ker(f) = \ker(f)$, que es el elemento neutro del grupo cociente. Al ser su núcleo trivial, $\bar{f}$ es inyectiva.

Al ser un homomorfismo biyectivo, $\bar{f}$ es un isomorfismo, quedando demostrado el teorema. $\square$

El alcance de este teorema se visualiza habitualmente mediante un diagrama conmutativo, donde π representa la proyección canónica al espacio cociente ($\pi(g) = g\ker(f)$):

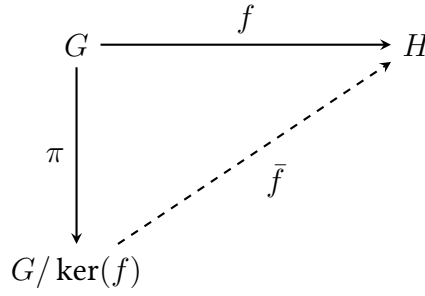


Figura 2.2: Diagrama conmutativo del Primer Teorema de Isomorfía. Todo homomorfismo f se factoriza de manera única a través del grupo cociente por su núcleo.

2.1.2 Grupos libres y presentaciones

Para continuar con la idea de relacionar el significado de los grupos con la topología hay que seguir con el concepto de espacio cociente y sus implicaciones. Hemos explicado recientemente que la idea subyacente era *compactar* los elementos de nuestro grupo. Bien, es *razonable* plantear ahora si tenemos alguna forma de *relacionar* nuestros elementos. En este camino aparecen las presentaciones y los grupos libres. Avancemos hasta el corazón del teorema de Nielsen-Schreier para comprender ahora la unidad básica que lo constituye y su relación con la topología.

Definición 2.1.9 (Grupo Libre). Dado un conjunto $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, denominamos *grupo libre generado por S* ², denotado como $\langle S \rangle$ o $F(S)$, al conjunto de todas las palabras *reducidas* que se pueden formar yuxtaponiendo los elementos de S y sus inversos formales $S^{-1} = \{a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$. La operación de grupo es la concatenación de palabras, seguida de la cancelación de pares adyacentes $a_i a_i^{-1}$ o $a_i^{-1} a_i$. La palabra vacía actúa como elemento neutro.

Observación 2.1.10. Entendemos por palabras *reducidas* a minimizar la **expresión de la misma**, es decir, al igual que el mismo número admite distintas representaciones ($3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1 \dots$), con las palabras del grupo libre sucede lo **mismo**. En este sentido, exigimos que se acorte al máximo la **representación de la misma**.

A la definición de grupo libre podemos acompañarla de la operación de *producto libre*, al igual que el producto cartesiano es la operación asociada a los conjuntos.

Definición 2.1.11 (Producto libre). Sean G_1, G_2 y H grupos, y sean $\varphi_1 : H \rightarrow G_1$ y $\varphi_2 : H \rightarrow G_2$ homomorfismos. El *producto libre* $G_1 *_H G_2$ se define como el grupo cociente $(G_1 * G_2)/N$, donde N es la clausura normal del conjunto de palabras de la forma $\varphi_1(h)\varphi_2(h)^{-1}$ para todo $h \in H$.



La Definición 2.1.9 es puramente combinatoria. Sin embargo, el grupo libre admite una caracterización más profunda mediante su propiedad universal.

Proposición 2.1.12 (Propiedad universal del grupo libre). Sea S un conjunto y $\langle S \rangle$ el grupo libre generado por S , con la aplicación de inclusión $i : S \rightarrow \langle S \rangle$. Para cualquier grupo G y

²En sintonía con la analogía de la formación de palabras, a este conjunto se le suele denominar **alfabeta**.

cualquier aplicación $f : S \rightarrow G$, existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : \langle S \rangle \rightarrow G$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$.

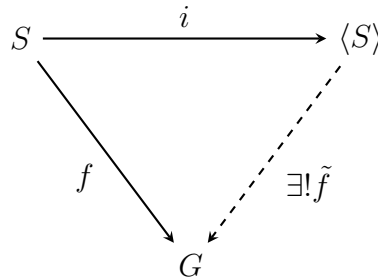


Figura 2.3: Diagrama conmutativo que ilustra la propiedad universal del grupo libre. Para toda aplicación f desde el conjunto de generadores S a un grupo cualquiera G , existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{f}$ que hace conmutar el diagrama.

Así, tenemos garantizado que el producto libre es el *más general* posible generado por S .

Observación 2.1.13. Esta propiedad, nos permite construir cualquier grupo a partir de uno libre. Tomando $S = G$ y $f = Id$ observamos que entonces, por la Propiedad Universal obtenemos un homomorfismo $\tilde{f} : \langle S \rangle \rightarrow G$. Así, por el Primer Teorema de Isomorfía (Teorema 2.1.8), $G \cong \langle S \rangle / \ker(\tilde{f})$.

Para formalizar la construcción de estos cocientes imponiendo las reglas que deseemos, necesitamos una herramienta previa.

Definición 2.1.14 (Clausura normal). Sea G un grupo y $R \subseteq G$ un subconjunto. La *clausura normal* de R en G , denotada como $ncl_G(R)$, es el menor subgrupo normal de G que contiene a R (equivalentemente, la intersección de todos los subgrupos normales que lo contienen).

Definición 2.1.15 (Presentación de un grupo). Sea $\langle S \rangle$ el grupo libre generado por el alfabeto S , y sea $R \subset \langle S \rangle$ un conjunto de palabras, a las que llamaremos *relaciones*. Definimos la presentación $\langle S \mid R \rangle$ como el grupo cociente $\langle S \rangle / ncl_G(R)$.

Observación 2.1.16. Si el subgrupo generado por el conjunto de relaciones R , denotado como $\langle R \rangle$, es ya un subgrupo normal dentro del grupo libre $\langle S \rangle$, entonces su clausura normal coincide con él mismo. De esta manera, el grupo de la presentación coincide simplemente con el cociente $\langle S \rangle / \langle R \rangle$.

Ejemplo 2.1.17. Esta notación abarca grupos de muy distinta índole:

- **El grupo libre $\mathbb{Z}$:** Los enteros son el primer ejemplo de grupo libre, sin relaciones ($R = \emptyset$). Tomando el 1 como generador, su presentación es $\langle a \mid \emptyset \rangle \cong \langle a \rangle$.
- **El grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$:** Se elige un generador y forzamos que su cuadrado sea el neutro: $\langle a \mid a^2 \rangle$.
- **El grupo diédrico D_n :** Como vimos en el Ejemplo 2.1.6, modela las simetrías de un polígono regular de n lados. Está generado por una rotación r y una reflexión s , sujetas a tres relaciones: r^n (la rotación es de orden n), s^2 (la reflexión es una involución) y $srsr$ (su interacción geométrica $srs = r^{-1}$). Su presentación es: $\langle r, s \mid r^n, s^2, srsr \rangle$.

Esta forma de describir grupos algebraicos conduce al *problema del isomorfismo*: dadas dos presentaciones finitas cualesquiera, $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ y $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$, ¿existe un algoritmo para decidir si definen grupos isomorfos? En 1958, Adian y Rabin demostraron de forma independiente que este problema es general y matemáticamente indecidible [Adi57; Rab58], un resultado que limita la teoría de grupos.

Cerramos así la sección de preliminares algebraicos habiendo construido el objeto central del Teorema de Nielsen-Schreier: el grupo libre. Como hemos visto con el problema del isomorfismo, el estudio puramente combinatorio de las palabras y sus relaciones presenta limitaciones algorítmicas infranqueables. Ahora, nuestro objetivo será dotar a estos grupos abstractos de una idea geométrica, traduciendo el problema de manipular grupos algebraicamente a un análogo que sí sepamos tratar en topología. Para esto, abrimos un puente entre la topología y el álgebra que nos servirá para recorrer este camino.

2.1.3 Teoría de categorías

Acudiendo a la teoría de categorías, encontraremos una estrategia para tratar este problema.

Definición 2.1.18 (Categoría). Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de las siguientes partes:

- Una clase de *objetos*, denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
- Para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, un conjunto de *morfismos* denotado por $\text{Hom}(X, Y)$.
- Una operación de *composición* de morfismos que es asociativa: dados $f \in \text{Hom}(X, Y)$ y $g \in \text{Hom}(Y, Z)$, existe un morfismo $g \circ f \in \text{Hom}(X, Z)$.
- Para cada objeto X , existe un *morfismo identidad* $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$ tal que $f \circ \text{id}_X = f$ y $\text{id}_Y \circ f = f$ para cualquier morfismo $f \in \text{Hom}(X, Y)$.

Así, la estrategia consiste en asociar a cada espacio topológico un invariante algebraico (como un grupo) que podamos comparar más fácilmente. Para ilustrar esto, consideremos la siguiente analogía.

Ejemplo 2.1.19. Imaginemos que tenemos dos circuitos de carreras y queremos saber si es la misma pista. Como no podemos verlos desde arriba, mandamos a un piloto a dar una vuelta completa a una velocidad constante y midemos su tiempo por vuelta. Si los tiempos son distintos sabemos que las pistas son distintas, pero si por el contrario son iguales, no podemos asegurar que sean el mismo circuito. Uno podría ser un óvalo y el otro un trazado cuadrado con muchísimas curvas; ambos pueden tener exactamente la misma longitud (y dar el mismo tiempo), pero ser espacios distintos.

El papel que juega el *tiempo por vuelta* en este ejemplo es el *invariante* que buscamos con la estrategia descrita. Así, pasemos a dar la siguiente definición de *functor covariante*, para conducir el pensamiento en este sentido.

Definición 2.1.20 (Functor Covariante). Llamamos *functor covariante* a una asignación F entre dos categorías $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que asocia cada objeto $X \in \mathcal{C}_1$ con un objeto $F(X) \in \mathcal{C}_2$, y cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ con un morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, respetando identidades y composiciones:

- $F(id_X) = id_{F(X)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Demostramos a partir de esta definición el siguiente resultado, que representa justamente la idea con la que hemos comenzado el capítulo.

Proposición 2.1.21. *Si un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}_1$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}_2$.*

Demostración. Si f es isomorfismo, existe f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = id_Y$ y $f^{-1} \circ f = id_X$. Aplicando el functor:

$$id_{F(Y)} = F(id_Y) = F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1})$$

Análogamente, $F(f^{-1}) \circ F(f) = id_{F(X)}$. Por lo tanto, $F(f)$ es un isomorfismo cuya inversa es $F(f^{-1})$. $\square$

Es importante la siguiente observación acerca de la definición de isomorfismo. Adentrarnos en profundidad en la teoría de categorías queda fuera del objetivo de este trabajo, sin embargo puede verse una explicación más detallada en [AHS04, Capítulo I].

Observación 2.1.22. En la demostración de la Proposición 2.1.21 estamos asumiendo implícitamente que las categorías con las que vamos a trabajar son subcategorías de la categoría de conjuntos (**Set**). Los objetos son conjuntos dotados de cierta estructura, los morfismos son aplicaciones entre ellos, y un isomorfismo se corresponde siempre con una biyección, lo que garantiza la existencia directa de la aplicación inversa f^{-1} . De no hacer esta suposición y trabajar en una categoría abstracta general, habría que definir con mayor rigor la noción de isomorfismo.

Ejemplo 2.1.23. Un contraejemplo elemental sería una categoría formada por solo dos objetos A y B , sus respectivos morfismos identidad, y un único morfismo $f : A \rightarrow B$. En este contexto, f es simultáneamente épico y mónico³, pero es evidente que no es un isomorfismo, pues carece de una inversa de $B \rightarrow A$.

2.2 Topología

Pasamos ahora a introducir la segunda gran área que rodea el teorema en el que se centra este trabajo, para cuya redacción se ha acudido a [Hat02] y [Sti93]. La topología estudia las propiedades globales de los espacios que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas, biyectivas, de inversa continua (homeomorfismos). Sin embargo, demostrar que dos espacios *no* son homeomorfos es un problema abierto. Así, si conseguimos encontrar un functor con el que relacionar grupos y espacios topológicos, si los grupos algebraicos $F(X)$ y $F(Y)$ no son isomorfos, los espacios topológicos X e Y no pueden ser homeomorfos. El primer y más visual de estos funtores algebraicos es el Grupo Fundamental cuya idea vamos a motivar en las siguientes secciones para concluir el capítulo con su definición y una serie de ejemplos que lo ilustren.

³En teoría de categorías, un monomorfismo y epimorfismo son las generalizaciones abstractas de las nociones de inyectividad y sobreyectividad, respectivamente.

2.2.1 Caminos y Homotopías

Entre los numerosos ejemplos de espacios que podemos encontrar, quizás dos de los más conocidos sean la esfera $\mathbb{S}^2$ y el toro $\mathbb{T}^2$. El ejemplo siguiente sirve para justificar e introducir las herramientas con las que se construirá el grupo fundamental.

Ejemplo 2.2.1. $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$ son espacios topológicos compactos y conexos. A pesar de ello, parece evidente que no pueden ser homeomorfos, pues el toro tiene un agujero que la esfera no. Así, respaldando nuestra intuición, si tomamos uno de los meridianos del toro y suponemos la existencia de un homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, entonces la imagen de dicho meridiano sería un camino cerrado en la esfera. Si ahora consideramos ambos espacios sin el meridiano y su imagen, entonces el toro seguiría siendo un espacio conexo, mientras que la esfera, por el Teorema de la Curva de Jordan, se dividiría en dos componentes conexas, lo que es una contradicción. Este último resultado no es nada trivial, aunque en [Tve80] se deja una breve demostración del mismo.

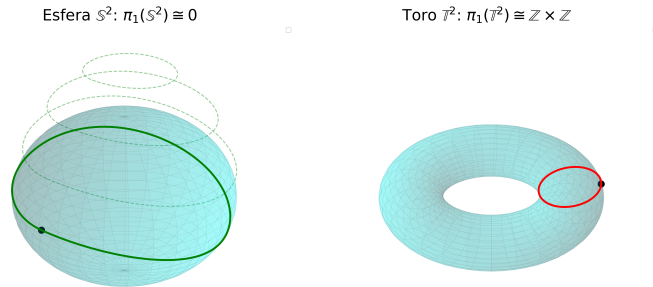


Figura 2.4: Representación geométrica de caminos cerrados sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$.

A la luz del ejemplo anterior, parece ser que debe existir una relación entre los caminos y agujeros que tiene un espacio topológico. Así, podemos establecer la siguiente definición, en-caminándonos en el estudio de estas propiedades.

Definición 2.2.2 (Camino y Lazo). Sea X un espacio topológico. Una aplicación continua $p : ([0, 1], \tau_U) \rightarrow (X, \tau_X)$ se denomina *camino* desde el origen $p(0)$ hasta el extremo $p(1)$. Si $p(0) = p(1) = x_0$, decimos que p es un *lazo* basado en x_0 .

Habitualmente se denotará como $p = p(t)$ a un camino en un cierto espacio topológico X y como $\bar{p}(t) = p(1 - t)$ al camino inverso, es decir, a aquel que recorre la gráfica definida por p a en el mismo tiempo pero en sentido contrario. Además de esta definición, es coherente pensar en una operación que nos permita operar con los caminos para intentar dotar de la estructura de grupo que buscamos a nuestro espacio. Aparece por tanto, de manera natural, la operación de pegado de caminos.

Definición 2.2.3 (Concatenación de caminos). Dados dos caminos p, q en X tales que $p(1) = q(0)$, su *concatenación* $p * q : [0, 1] \rightarrow X$ se define recorriendo p en la mitad de tiempo, en la primera parte, y q en la segunda, es decir:

$$(p * q)(t) = \begin{cases} p(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ q(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La idea de concatenar es la de pegar los extremos, de manera que recorremos en la primera mitad del intervalo el primer camino y en la segunda el otro.

Observación 2.2.4. Uno podría pensar que tomando la concatenación ya estamos en situación de dotar de estructura de grupo a un espacio topológico, sin embargo, no es así. A primera vista puede observarse que en la Definición 2.2.3 se exige que el extremo de un camino sea el origen del otro, por lo que ya obligaría a restringir el conjunto de caminos. Adicionalmente, si buscamos un elemento neutro para esta operación, no lo encontraríamos. Como candidato idóneo podría pensarse en el *camino constante* de base x , es decir, $c_x(t) \equiv x, \forall t \in [0, 1]$, pero este camino no verifica la definición de elemento neutro⁴ pues, aunque $c_x * p$ defina la misma gráfica que p , como aplicaciones no son iguales.

Pese a estas limitaciones, precisamente al desarrollar ambos contraejemplos aparecen las dos ideas que se van a desarrollar para intentar superar ambos escollos.

- Para tomar un conjunto en el que todos los elementos admitan la operación puede restringirse el conjunto a los lazos basados en el mismo punto, de este modo todos los caminos tienen como origen y extremo el mismo punto $x \in X$ que tomemos como base y por tanto la *concatenación* estará definida para todo camino en X .
- El problema del neutro es más delicado. En cierto modo parece intuitivo pensar que, pese a la Observación 2.2.4, el hecho de que describan la misma gráfica no puede suponer tal diferencia entre ambas aplicaciones. Por ello, introducimos la noción de *homotopía de caminos*. Tal y como se puede observar en la Figura 2.5, la idea de homotopía es deformar un camino de manera continua sobre el otro, de manera que podamos definir un conjunto de caminos *equivalentes*. Cobra en este punto sentido los conceptos introducidos en los preliminares algebraicos. En el espacio cociente, la clase de equivalencia definida por el camino constante de base x será el neutro.

Desarrollemos por tanto estas dos situaciones para llegar así al Grupo Fundamental.

Definición 2.2.5 (homotopía de caminos). Sea X un espacio topológico, p, q dos caminos en X con el mismo origen y extremo, es decir, $p(0) = q(0)$ y $p(1) = q(1)$. Entonces decimos que p y q son *homótopos* si existe una aplicación continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que:

- $F(0, t) = p(t), \forall t \in [0, 1]$
- $F(1, t) = q(t), \forall t \in [0, 1]$
- $F(s, 0) = q(0), \forall s \in [0, 1]$
- $F(s, 1) = q(1), \forall s \in [0, 1]$

A tal aplicación F se llama *homotopía de caminos*

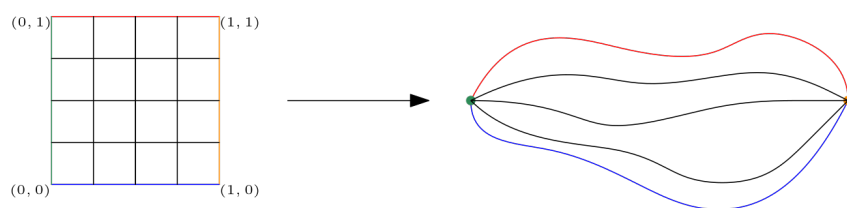


Figura 2.5: Representación gráfica de la noción de homotopía de caminos.

⁴Recordemos que e es el elemento neutro, pues de existir es único, si $\forall x \in X, e * x = x * e = x$

Como se ha anticipado, los caminos homotópos definirán una clase de equivalencia a la que trataremos de dar estructura de grupo. Para las siguientes demostraciones haremos uso de un lema topológico elemental [Mun02, Teorema 18.3]:

Lema 2.2.6 (Lema del pegado). *Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos cerrados (o ambos abiertos) tales que $X = A \cup B$. Si $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ son aplicaciones continuas que coinciden en la intersección (es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$), entonces la aplicación unificada $h : X \rightarrow Y$, definida como $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$, es continua.*

Así, demostremos a continuación una serie de resultados que nos serán de utilidad.

Proposición 2.2.7. *Sea X un espacio topológico, $p : I \rightarrow X$ un lazo en x y c_x el camino constante en $x \in X$, entonces $p * c_x \sim c_x * p \sim p$.*

Demostración. Construyamos explícitamente la homotopía $F : I \times I \rightarrow X$. La idea geométrica es que el tiempo que el parámetro pasa recorriendo el camino constante c_x vaya disminuyendo progresivamente hasta desaparecer. Definimos:

$$F(s, t) = \begin{cases} p\left(\frac{2t}{s+1}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ x & \text{si } \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Es inmediato comprobar que F es continua en todo el dominio gracias al lema de pegado, ya que en el punto de transición $t = \frac{s+1}{2}$, ambas ramas valen $p(1) = x$. Además, evaluando en los extremos de la homotopía obtenemos $F(0, t) = (p * c_x)(t)$ y $F(1, t) = p(t)$, manteniéndose fijos en x . Un argumento análogo lleva a que $c_x * p \sim p$. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea X un espacio topológico, $p : [0, 1] \rightarrow X$ un lazo en x y c_x el camino constante en $x \in X$, entonces $p * \bar{p} \sim \bar{p} * p \sim c_x$.*

Demostración. Definimos la homotopía $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ de forma que el camino avance por p hasta un cierto instante y luego retroceda por la misma traza, contrayéndose paulatinamente hacia el origen x a medida que el parámetro de deformación s avanza hacia 1:

$$F(s, t) = \begin{cases} p(2t(1-s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p(2(1-t)(1-s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Esta función es continua al coincidir ambas expresiones en el ecuador $t = 1/2$ con el valor $p(1-s)$. Evaluando en los extremos de la homotopía, resulta $F(0, t) = (p * \bar{p})(t)$ y $F(1, t) = p(0) = x = c_x(t)$. Los extremos del lazo permanecen fijos en x para todo $s \in I$. Por consiguiente, $p * \bar{p} \sim c_x$. Un razonamiento idéntico prueba $\bar{p} * p \sim c_x$. $\square$

Proposición 2.2.9. *Sea X un espacio topológico, $p, q, r : I \rightarrow X$ tres caminos tales que $p(1) = q(0)$, $q(1) = r(0)$, entonces $(p * q) * r \sim p * (q * r)$*

Demostración. La demostración se fundamenta en una reparametrización lineal del intervalo temporal. El camino $(p * q) * r$ recorre p en el subintervalo $[0, 1/4]$, q en $[1/4, 1/2]$ y r en $[1/2, 1]$. Por otro lado, $p * (q * r)$ los recorre en $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ y $[3/4, 1]$ respectivamente.

Definimos los puntos de transición intermedios que varían de forma continua con el parámetro s : $t_1(s) = \frac{s+1}{4}$ y $t_2(s) = \frac{s+2}{4}$. La homotopía $F : I \times I \rightarrow X$

$$F(s, t) = \begin{cases} p\left(\frac{t}{t_1(s)}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1(s) \\ q\left(\frac{t-t_1(s)}{t_2(s)-t_1(s)}\right) & \text{si } t_1(s) \leq t \leq t_2(s) \\ r\left(\frac{t-t_2(s)}{1-t_2(s)}\right) & \text{si } t_2(s) \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Por construcción y nuevamente por el lema del pegado, F es continua, fija los extremos y transforma el dominio de una concatenación en el de la otra, estableciendo que $(p * q) * r \sim p * (q * r)$. $\square$

Observación 2.2.10. Tal y como se ha mencionado anteriormente, la concatenación de caminos no verifica la propiedad asociativa pues, pese a describir la misma gráfica, como aplicaciones no son iguales. Sin embargo la Proposición 2.2.9 nos permite establecer una *asociatividad* en el sentido de homotopías.

2.2.2 Grupo fundamental

Llegamos así a la herramienta que nos permitirá estudiar el problema del homeomorfismo de espacios topológicos.

Definición 2.2.11 (Grupo fundamental o de Poincaré). El conjunto de las clases de equivalencia de lazos con base en x_0 , denotado por $\pi_1(X, x_0)$, dotado con la operación inducida por la concatenación de caminos $[p] * [q] = [p * q]$, recibe el nombre de *grupo fundamental* o de *Poincaré* de X en el punto base x_0 .

Antes de proseguir, justifiquemos que efectivamente el grupo fundamental es un grupo.

Proposición 2.2.12. El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con la operación de la Definición 2.2.11 es un grupo.

Demostración. En primer lugar, comprobemos que la operación está bien definida. Sean $[p_1] = [p_2]$ y $[q_1] = [q_2]$, entonces

$$[p_1 * q_1] = [p_1] * [q_1] = [p_2] * [q_2] = [p_2 * q_2]$$

Una vez tenemos la operación, pasemos a las propiedades de grupo:

- **Asociatividad:** Dados tres lazos $p, q, r \in \pi_1(X, x_0)$ y en virtud de la Proposición 2.2.9 y como se anticipó en la Observación 2.2.10, se verifica que

$$([p][q])[r] = [p * q][r] = [(p * q) * r] = [p * (q * r)] = [p][q * r] = [p]([q][r])$$

- **Elemento neutro:** Como se explicó en la Observación 2.2.4, la clase del camino constante $[c_{x_0}]$ actúa como elemento neutro, cumpliendo $[p] * [c_{x_0}] = [c_{x_0}] * [p] = [p]$ gracias a la Proposición 2.2.7 que demostramos anteriormente.
- **Inverso:** Para cada lazo $p(t)$, se verifica que $[p] * [\bar{p}] = [\bar{p}] * [p] = [c_{x_0}]$, por lo que el inverso de la clase es $[\bar{p}]$.

□

Es importante notar que el grupo fundamental depende, *a priori*, de la elección del punto base x_0 . Sin embargo, demostramos en la siguiente proposición que si el espacio X es conexo por caminos, es decir, para cualesquiera dos puntos $x_0, x_1 \in X$ existe un camino γ que los une, entonces el grupo fundamental es independiente del punto base elegido, por lo que es habitual en este caso hablar de $\pi(X)$ sin especificar el origen.

Proposición 2.2.13. *Sea X un espacio conexo por caminos, sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos distintos, entonces $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$.*

Demostración. Al ser X un espacio conexo por caminos, podemos garantizar la existencia de un camino $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. A partir de este elemento, definimos la aplicación $\Phi_\gamma : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dada por:

$$\Phi_\gamma([p]) = [\gamma * p * \bar{\gamma}] \quad (2.4)$$

Veamos en primer lugar que esta aplicación está bien definida, es decir, que su valor es independiente del representante elegido para la clase de homotopía.

Supongamos que tomamos dos lazos homótopos $p \sim q$, de forma que $[p] = [q]$. Haciendo uso de que la operación de concatenación respeta las clases de equivalencia, se tiene:

$$\Phi_\gamma([p]) = [\gamma * p * \bar{\gamma}] = [\gamma] * [p] * [\bar{\gamma}] = [\gamma] * [q] * [\bar{\gamma}] = [\gamma * q * \bar{\gamma}] = \Phi_\gamma([q]) \quad (2.5)$$

A continuación, comprobemos que preserva la estructura de grupo (es un homomorfismo). Sean $[p_1], [p_2] \in \pi_1(X, x_1)$:

$$\Phi_\gamma([p_1]) * \Phi_\gamma([p_2]) = [\gamma * p_1 * \bar{\gamma}] * [\gamma * p_2 * \bar{\gamma}] = [\gamma * p_1 * (\bar{\gamma} * \gamma) * p_2 * \bar{\gamma}] \quad (2.6)$$

En virtud de la Proposición 2.2.8 y Proposición 2.2.7, el término central $[\bar{\gamma} * \gamma]$ es homótopo al camino constante $[c_{x_1}]$, por lo que:

$$[\gamma * p_1 * c_{x_1} * p_2 * \bar{\gamma}] = [\gamma * (p_1 * p_2) * \bar{\gamma}] = \Phi_\gamma([p_1 * p_2]) \quad (2.7)$$

Finalmente, para demostrar que Φ_γ es un isomorfismo, veamos que es biyectiva exhibiendo explícitamente su inversa. Tomando el camino inverso $\bar{\gamma}$, definimos de manera análoga $\Phi_{\bar{\gamma}} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ como $\Phi_{\bar{\gamma}}([q]) = [\bar{\gamma} * q * \gamma]$. Comprobamos la composición $\Phi_{\bar{\gamma}} \circ \Phi_\gamma$ para un lazo arbitrario $[p] \in \pi_1(X, x_1)$:

$$(\Phi_{\bar{\gamma}} \circ \Phi_\gamma)([p]) = \Phi_{\bar{\gamma}}([\gamma * p * \bar{\gamma}]) = [\bar{\gamma} * (\gamma * p * \bar{\gamma}) * \gamma] \quad (2.8)$$

Aplicando la asociatividad en clases de homotopía (Proposición 2.2.9) y agrupando términos:

$$[\bar{\gamma} * \gamma] * [p] * [\bar{\gamma} * \gamma] = [c_{x_1}] * [p] * [c_{x_1}] = [p] \quad (2.9)$$

Por tanto, $\Phi_{\bar{\gamma}} \circ \Phi_\gamma = \text{Id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Realizando el procedimiento análogo para la composición inversa obtenemos que existe una inversa por ambos lados biyectiva y homomorfismo, concluimos que es un isomorfismo. Queda así demostrado que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. □

Para concluir este primer capítulo, y antes de desarrollar herramientas más potentes para el cálculo del grupo fundamental como el Teorema de Seifert-van Kampen, conviene ilustrar esta definición con algunos de los espacios topológicos más elementales y recurrentes.

2.2.3 Algunos grupos fundamentales.

Presentamos a continuación una serie de espacios cuyos grupos fundamentales pueden ser calculados de manera relativamente sencilla. Generalmente los argumentos para la obtención del grupo fundamental de un espacio requieren de resultados potentes o herramientas más complejas.

En primer lugar, encontramos un tipo particular de espacio denominado *espacio simplemente conexo*, de gran interés.

Definición 2.2.14. Sea X un espacio topológico, decimos que X es *simplemente conexo* si:

- X es conexo por caminos.
- $\pi_1(X) \cong \{0\}$

Ejemplo 2.2.15 (Espacios simplemente conexos). Así, ejemplos de este son los siguientes:

- **El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$:** Cualquier lazo en $\mathbb{R}^n$ puede contraerse al origen mediante la homotopía lineal $F(s, t) = (1 - s)p(t)$. Por tanto, $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \{0\}$.
- **La esfera $\mathbb{S}^2$:** Como podía apreciarse en la Figura 2.4 o en la Figura 2.6, cualquier lazo sobre su superficie puede contraerse hasta un punto, de modo que $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{0\}$. En general, $\pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \{0\}$ para $n \geq 2$. Este resultado lo daremos con detalle en el Capítulo 3 cuando hayamos enunciado y demostrado el *Teorema de Seifert-van Kampen* (Teorema 3.1.2).

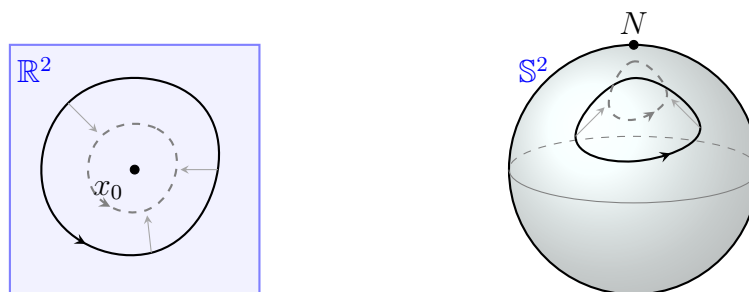


Figura 2.6: Representación de la contracción continua de lazos hacia un punto en el plano $\mathbb{R}^2$ (izquierda) y hacia el polo norte en la esfera $\mathbb{S}^2$ (derecha), ilustrando que ambos espacios son simplemente conexos.

Ejemplo 2.2.16 (La circunferencia $\mathbb{S}^1$). El caso de la circunferencia unidimensional es radicalmente opuesto a los que hemos visto. Un lazo en $\mathbb{S}^1$ puede dar vueltas alrededor del *agujero* central. Así, dos lazos son homótopos si y solo si dan el mismo número de vueltas, dando la orientación correspondiente (girar en sentido antihorario suma una vuelta, en sentido horario la resta). De este modo, la clase de homotopía queda completamente determinada por este *número de rotación*, también conocido como *índice*. El grupo fundamental es, por tanto, isomorfo al grupo aditivo de los números enteros, $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, donde el generador del grupo (el entero 1) corresponde al lazo que da exactamente una vuelta en sentido positivo.

Para calcular el grupo fundamental de espacios más complejos sin recurrir a la definición pura, usamos el concepto de *equivalencia homotópica*.

Definición 2.2.17 (Equivalencia homotópica). Sean X e Y dos espacios topológicos. Decimos que son *homotópicamente equivalentes* (o que tienen el mismo tipo de homotopía), y lo denotamos por $X \simeq Y$, si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. A las aplicaciones f y g se les denomina equivalencias homotópicas.

La verdadera potencia de esta noción reside en el siguiente resultado, que justifica por qué podemos calcular el grupo fundamental de un espacio transformándolo en otro más sencillo.

Proposición 2.2.18 (Invarianza homotópica del grupo fundamental). Sean X e Y espacios topológicos conexos por caminos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo para todo $x_0 \in X$. En consecuencia, $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Demostración. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica con inversa homotópica $g : Y \rightarrow X$. Sea $H : X \times I \rightarrow X$ la homotopía entre id_X y $g \circ f$. Esta homotopía define un camino continuo $\alpha : I \rightarrow X$ dado por $\alpha(t) = H(x_0, t)$, que conecta el punto base original x_0 con el punto $(g \circ f)(x_0)$.

Para cualquier lazo p basado en x_0 , la homotopía H proporciona una deformación continua del lazo p en el lazo $(g \circ f)(p)$. Esta deformación traza una superficie cilíndrica en X que nos permite relacionar ambas clases mediante el camino α . Formalmente, al evaluar el efecto sobre el grupo fundamental, se verifica que $(g \circ f)_*([p]) = [\bar{\alpha} * p * \alpha]$.

En otras palabras, la composición $(g \circ f)_*$ coincide exactamente con el isomorfismo de cambio de punto base $\Phi_{\bar{\alpha}}$ que demostramos en la Proposición 2.2.13. Dado que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ es un isomorfismo, deducimos que f_* debe ser inyectiva y g_* sobreyectiva.

Aplicando un razonamiento análogo para la homotopía entre $f \circ g$ y id_Y , deducimos que $f_* \circ g_*$ también es un isomorfismo, lo que implica que f_* es sobreyectiva. Al ser simultáneamente inyectiva y sobreyectiva, concluimos que f_* es un isomorfismo. $\square$

Haciendo uso de esta proposición podemos dar el último ejemplo del capítulo.

Ejemplo 2.2.19 (El plano agujereado). Consideremos el plano euclídeo al que le quitamos el origen, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Geométricamente, podemos retraer por deformación todo este espacio sobre la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ centrada en el origen, empujando los puntos exteriores hacia adentro y los interiores hacia afuera a lo largo de sus radios, tal y como muestra la siguiente figura:

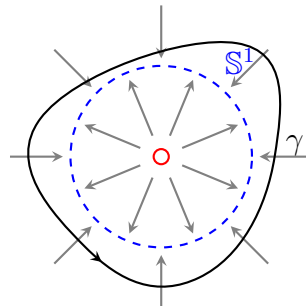


Figura 2.7: Retracto de deformación del plano agujereado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sobre la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. El lazo γ conserva su clase de homotopía al proyectarse sobre $\mathbb{S}^1$.

Al tener el mismo tipo de homotopía que la circunferencia, concluimos que: $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Este resultado aparentemente sencillo tiene profundas implicaciones analíticas y geométricas. En análisis complejo, justifica por qué la integral de línea de $1/z$ a lo largo de un lazo cerrado cuenta el número de veces que el camino rodea la singularidad en el origen (el índice de la curva).

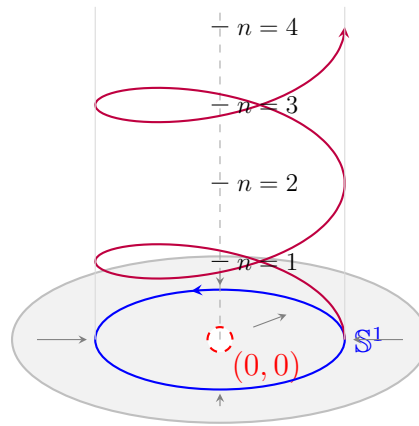


Figura 2.8: Al retraer el plano agujereado sobre $\mathbb{S}^1$, podemos clasificar sus lazos según el número de vueltas. Al *desplegar* estas vueltas en un eje vertical, obtenemos una hélice. Cada vuelta completa sobre $\mathbb{S}^1$ eleva el camino al siguiente nivel, creando una biyección entre las clases de homotopía y el grupo aditivo de los enteros $\mathbb{Z}$.

Topología de los Grupos Libres

En el capítulo anterior se ha mencionado el conocido como *problema del homeomorfismo* y hemos avanzado en la construcción del grupo fundamental, herramienta algebraica con la que podremos estudiar los espacios topológicos. Ahora, nos adentramos en el cálculo del grupo fundamental y relacionaremos esta *información* con su estructura algebraica. Los resultados fundamentales de este capítulo serán el Teorema de Seifert-van Kampen¹ y la correspondencia de Galois entre espacios recubridores y subgrupos del grupo fundamental. Para la redacción se ha seguido principalmente [Hat02].

3.1 El Teorema de Seifert-van Kampen

Tal y como se ha introducido, con el grupo fundamental podemos estudiar la topología de un espacio. Sin embargo, el cálculo directo del grupo fundamental puede ser de gran dificultad, incluso para espacios aparentemente *sencillos*. En esta situación se plantea si es posible aplicar un enfoque de *divide y vencerás*, es decir, si podemos descomponer un espacio topológico en partes más simples.

Gracias a la Definición 2.1.11 igual que hicimos con los grupos libres en el Capítulo 2, podemos dotar a esta construcción algebraica de un significado mucho más profundo recurriendo a su *propiedad universal*. Si el grupo libre era el grupo *más general* generado por un alfabeto sin relaciones, el producto libre es su homólogo, construido a partir de G_1 y G_2 , dos estructuras preexistentes, que comparten un subgrupo común H .

Proposición 3.1.1 (Propiedad universal del producto libre). *El grupo $G_1 *_H G_2$, junto con los homomorfismos naturales $j_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_H G_2$ y $j_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_H G_2$, satisface que $j_1 \circ \varphi_1 = j_2 \circ \varphi_2$. Además, para cualquier grupo K y homomorfismos $f_1 : G_1 \rightarrow K$ y $f_2 : G_2 \rightarrow K$ tales que $f_1 \circ \varphi_1 = f_2 \circ \varphi_2$, existe un único homomorfismo $\Phi : G_1 *_H G_2 \rightarrow K$ que hace conmutar el diagrama:*

$$\Phi \circ j_1 = f_1 \quad y \quad \Phi \circ j_2 = f_2$$

¹Los artículos originales pueden encontrarse en [Sei31; Kam33]

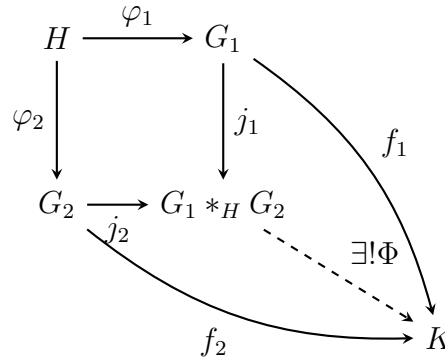


Figura 3.1: Diagrama conmutativo (*pushout*) que ilustra la propiedad universal del producto libre.

A partir del concepto de universalidad pasamos al Teorema de Seifert-van Kampen. Éste establece que, bajo ciertas condiciones de conexidad, el grupo fundamental de la unión de dos espacios es precisamente este producto libre, donde H juega el papel del grupo fundamental de la intersección. La demostración del teorema puede encontrarse en [Mun02, Teorema 70.1], [Mas91, Theorem 2.1] o [Hat02, sección 1.2]. Posteriormente sí enunciaremos y demostraremos una serie de corolarios que se utilizarán para el cálculo de grupos fundamentales de espacios particulares, como el de la $\mathbb{S}^n$ que se mencionó en el Capítulo 2 o la rosa de n pétalos, que será el espacio fundamental en la demostración del Teorema de Nielsen-Schreier.

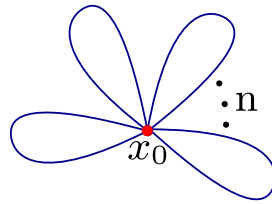


Figura 3.2: Representación de la rosa de n -pétalos.

Teorema 3.1.2 (Seifert-van Kampen). *Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subset X$ dos conjuntos abiertos tales que $X = U \cup V$. Supongamos que U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos. Sea $x_0 \in U \cap V$ el punto base. Entonces, el siguiente diagrama de homomorfismos inducidos por las inclusiones es un diagrama pushout en la categoría de grupos:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(U, x_0) \\ j_* \downarrow & & \downarrow k_* \\ \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{l_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

*En particular, el homomorfismo inducido $\Phi : \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo.*

A partir del resultado de Seifert-van Kampen es natural enunciar una serie de corolarios que se siguen de particularizar el teorema para casos concretos de $\pi_1(U \cap V)$, $\pi_1(U)$ o $\pi_1(V)$.

Corolario 3.1.3 ($\pi_1(U \cap V) \cong \{e\}$). *En las condiciones del Teorema de Seifert-van Kampen, supongamos que la intersección $U \cap V$ es simplemente conexa. En este caso, el grupo fundamental*

del espacio total es el producto libre de los grupos fundamentales de los abiertos:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$$

Demostración. Por el Teorema de Seifert-van Kampen, sabemos que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al producto libre $\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$. Algebraicamente, este grupo se construye como el cociente del producto libre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ por la clausura normal generada por las palabras de la forma $i_*([h])j_*([h])^{-1}$, con $[h] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

Si $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{e\}$, el único elemento a considerar es el lazo constante e . Sus imágenes bajo los homomorfismos inducidos son los elementos neutros respectivos en U y en V . Por lo tanto, las relaciones se reducen a la identidad $ee^{-1} = e$. Como la clausura normal del neutro es únicamente el subgrupo trivial, el grupo cociente coincide exactamente con el producto libre original sin relaciones adicionales, demostrando el resultado. $\square$

Corolario 3.1.4 ($\pi_1(V) \cong \{e\}$). *En las condiciones del Teorema de Seifert-van Kampen, supongamos que uno de los abiertos, digamos V , es simplemente conexo. Entonces, el grupo fundamental de X es el grupo fundamental de U cocientado por las relaciones que provienen de la intersección:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) / \langle\langle i_*(\pi_1(U \cap V, x_0)) \rangle\rangle \quad (3.1)$$

Demostración. Aplicando la construcción del producto libre, formamos en primer lugar el producto libre de los grupos fundamentales de los abiertos. Dado que $\pi_1(V, x_0) \cong \{e\}$, este producto se reduce a $\pi_1(U, x_0) * \{e\} \cong \pi_1(U, x_0)$.

Para cualquier clase de homotopía $[h] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, su imagen bajo el homomorfismo $j_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ es necesariamente el elemento neutro e , puesto que la imagen de j_* debe estar contenida en el grupo trivial. En consecuencia, las palabras que generan el subgrupo normal de las relaciones son de la forma $i_*([h])j_*([h])^{-1} = i_*([h])e^{-1} = i_*([h])$. Al realizar el cociente por la clausura normal de estos elementos, obtenemos exactamente la expresión del enunciado. $\square$

Corolario 3.1.5 ($\pi_1(U) \cong \{e\}$ y $\pi_1(V) \cong \{e\}$). *En las condiciones del Teorema de Seifert-van Kampen, supongamos que tanto U como V son simplemente conexos. Entonces, el grupo resultante es el trivial independientemente de la intersección:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \{e\} \quad (3.2)$$

Demostración. Partimos de las hipótesis $\pi_1(U, x_0) \cong \{e\}$ y $\pi_1(V, x_0) \cong \{e\}$. El producto libre de dos grupos triviales es, de manera inmediata, el grupo trivial $\{e\} * \{e\} \cong \{e\}$. El grupo fundamental del espacio total X se obtiene realizando un cociente sobre este producto libre por la clausura normal de las relaciones de la intersección. Puesto que el único cociente posible del grupo trivial es él mismo, el resultado de esta operación es $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$. $\square$

Así, pasemos a dar un ejemplo fundamental de aplicación del Teorema 3.1.2 para el cálculo del grupo fundamental.

Ejemplo 3.1.6 (La esfera $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 2$). Consideremos la esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n$. Para calcular ahora su grupo fundamental, la recubrimos con dos conjuntos abiertos U y V . Sean $N = (0, \dots, 0, 1)$ el polo norte y $S = (0, \dots, 0, -1)$ el polo sur. Definimos: $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$

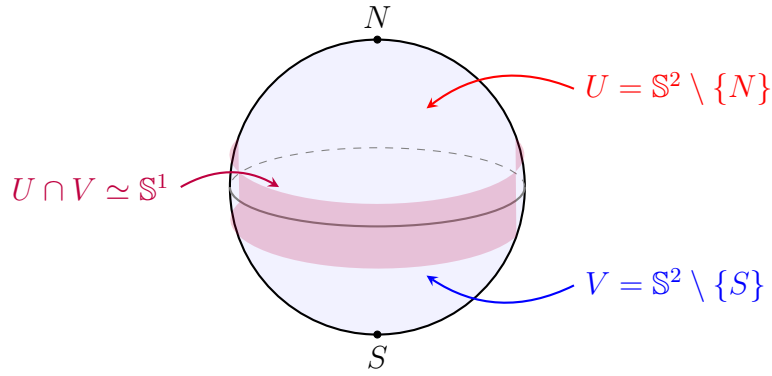


Figura 3.3: Recubrimiento de la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante los abiertos contráctiles U y V . Su intersección forma una franja conexa por caminos.

Es evidente que $X = U \cup V$. Mediante la proyección estereográfica, sabemos que tanto U como V son homeomorfos al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Al ser $\mathbb{R}^n$ contráctil, ambos abiertos son simplemente conexos, es decir, $\pi_1(U) \cong \{e\}$ y $\pi_1(V) \cong \{e\}$. La intersección $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$ es homeomorfa a un cilindro infinito $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, el cual se retrae por deformación al ecuador $\mathbb{S}^{n-1}$. Como $n \geq 2$, esta intersección tiene dimensión $n - 1 \geq 1$, por lo que $U \cap V$ es conexo por caminos (condición indispensable para aplicar el teorema). Al cumplirse todas las hipótesis, aplicamos el Tercer Corolario deducido de Seifert-van Kampen (Corolario 3.1.5): al ser la unión de dos abiertos simplemente conexos con intersección conexa por caminos, concluimos de forma directa que:

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \{e\}$$

Observación 3.1.7. Es importante resaltar por qué este poderoso argumento falla geométricamente para la circunferencia ($n = 1$). En $\mathbb{S}^1$, la intersección $U \cap V = \mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\}$ consta de dos arcos disjuntos, por lo que deja de ser conexa por caminos, inhabilitando el uso del Teorema 3.1.2 con este recubrimiento particular.

Así, hemos ilustrado cuál será la estrategia general:

- En primer lugar, recubriremos nuestro espacio topológico X con dos conjuntos abiertos U y V que sean conexos por caminos y cuyos grupos fundamentales sean conocidos o más sencillos de calcular.
- Estudiaremos la topología de la intersección $U \cap V$. Es imperativo comprobar que esta región es conexa por caminos para garantizar la aplicabilidad del teorema, tras lo cual calcularemos su grupo fundamental $\pi_1(U \cap V)$.
- Analizaremos los homomorfismos inducidos por las inclusiones $i : U \cap V \hookrightarrow U$ y $j : U \cap V \hookrightarrow V$. En la práctica, esto significa observar cómo se transforman los generadores del grupo fundamental de la intersección al considerarlos como lazos dentro de U y de V .
- Finalmente, aplicaremos el Teorema de Seifert-van Kampen para obtener el grupo fundamental del espacio total $\pi_1(X)$.

Con esta metodología, estamos preparados para el cálculo del grupo fundamental del espacio que conectará los grupos libres con la topología: la rosa de n pétalos.

3.1.1 El grupo fundamental de la rosa de n pétalos

Con la maquinaria del Teorema de Seifert-van Kampen establecida, estamos en disposición de calcular el grupo fundamental del espacio topológico que servirá como piedra angular para nuestra demostración geométrica: la rosa de n pétalos (o *bouquet* de circunferencias).

Definición 3.1.8 (Rosa de n pétalos). La *rosa de n pétalos* es el espacio construido al agrupar n circunferencias identificando un punto de cada circunferencia en un único punto común. De manera formal queda determinada como:

$$X_n = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1 / \sim \quad (3.3)$$

donde $\bigvee$ denota la unión de espacios topológicos identificando un punto común mediante la relación de equivalencia $\sim$, que en este caso será el punto central al que habitualmente denotaremos como x_0 .

Ejemplo 3.1.9. La Figura 3.4 muestra la diferencia entre la unión disjunta de dos circunferencias con la unión con identificación puntual. En la primera, el espacio resulta ser no conexo mientras que en el segundo obtenemos la *rosa* entrelazada por el punto central.

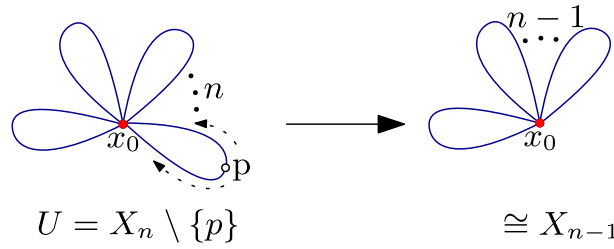


Figura 3.4: Comparación entre unión disjunta y unión con identificación puntual

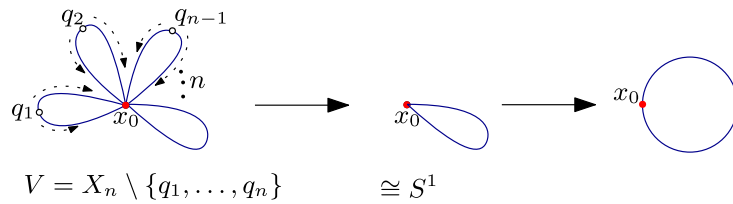
Proposición 3.1.10. Sea $X_n = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ la rosa de n pétalos. Entonces su grupo fundamental es el grupo libre de n generadores, es decir, $\pi_1(X_n) \cong F_n$, donde $F_n = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ denota al producto libre de n copias de $\mathbb{Z}$.

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción sobre el número de pétalos n , aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen. Consideramos x_0 el punto central donde conectan todos los pétalos, entonces:

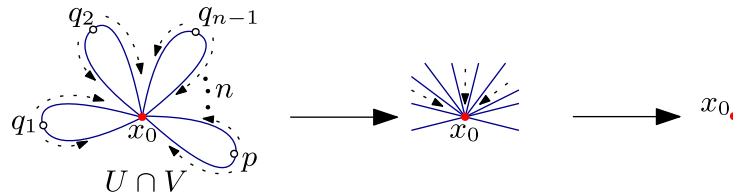
- Si $n = 1$, entonces tenemos la circunferencia $\mathbb{S}$, cuyo grupo fundamental argumentamos en el Ejemplo 2.2.16, es $\mathbb{Z}$, que es el grupo libre de 1 generador F_1 .
- Supongamos que el resultado es cierto para la rosa de $n - 1$ -pétalos, es decir, que $\pi_1(X_{n-1}) \cong F_{n-1}$.
- Tomemos un punto $p \neq x_0$ en el n -ésimo pétalo, al que denotaremos P_n . Definimos así $U := X_n \setminus \{p\}$. Como se ilustra en la Figura 3.5, este conjunto forma un arco abierto que puede retraerse hasta el punto central x_0 de modo que $U \cong X_{n-1}$, pues estamos eliminando uno de los pétalos. Por hipótesis de inducción, obtenemos que $\pi_1(U) \cong F_{n-1}$.


 Figura 3.5: Deformación del conjunto U , ilustrando que $\pi_1(U) \cong F_{n-1}$.

Por otro lado, tomemos ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $q_i \neq x_0$. Definimos así $V := X_n \setminus \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$. De manera análoga a lo que hicimos con U , retraemos los pétalos partidos hacia x_0 de modo que observamos (Figura 3.6) cómo $V \cong \mathbb{S}^1$ y por tanto $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$.


 Figura 3.6: Deformación del conjunto V , mostrando que $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z} \cong F_1$.

Vemos a continuación que $U \cap V = X_n \setminus \{p, q_1, \dots, q_{n-1}\}$. Así, esto forma un espacio contráctil a x_0 , pues tenemos todos los pétalos abiertos, de manera que podemos retraerlos a un conjunto estrellado y posteriormente al punto central x_0 , tal y como se representa en Figura 3.7. De este modo, $\pi_1(U \cap V) \cong \{e\}$.


 Figura 3.7: Retracción de $U \cap V$ en el punto central x_0 , demostrando que su grupo fundamental es trivial.

Nos encontramos así bajo las condiciones del Corolario 3.1.3:

- **Los conjuntos U y V son abiertos:** Considerando la rosa de pétalos X_n como un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, sabemos que cualquier conjunto finito de puntos (como $\{p\}$ o $\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$) es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Su complementario en $\mathbb{R}^2$ es, por tanto, un conjunto abierto. Por definición de la topología inducida, al intersecar estos abiertos con X_n obtenemos precisamente U y V , lo que garantiza que son abiertos en X_n .
- **U , V y $U \cap V$ son conexos por caminos:** Todos los conjuntos resultantes están formados por uniones de circunferencias enteras o arcos abiertos que se intersecan obligatoriamente en x_0 . Por consiguiente, cualquier punto puede conectarse con el origen mediante un camino contenido íntegramente en su propio pétalo.

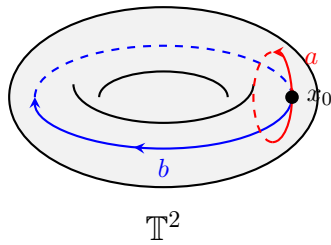
- $x_0 \in U \cap V$: Por construcción, los puntos eliminados p y q_i son estrictamente distintos de x_0 , garantizando que el punto base pertenece a la intersección.
- $\pi_1(U \cap V) \cong \{e\}$: Lo hemos probado al final de la demostración.

y por tanto

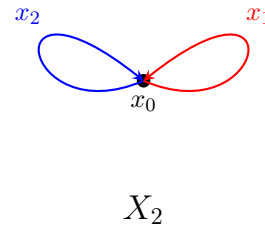
$$\pi_1(X_n) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong F_{n-1} * \mathbb{Z} \cong F_n \quad (3.4)$$

Concluyendo la demostración. □

Observación 3.1.11. Hemos demostrado que el grupo fundamental de la rosa de n pétalos es el grupo libre de n generadores. Por ejemplo, en dos dimensiones $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, o pensando en términos de generadores y relaciones, tenemos $\langle x_1, x_2, | \rangle$. Esto difiere del grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2$, que es $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, es decir, el grupo de dos generadores con la relación de conmutatividad. La siguiente figura representa la diferencia entre ambos espacios.



(a) Toro con sus generadores.



(b) Rosa X_2 con sus generadores.

Figura 3.8: Comparación entre el Toro y la Rosa de 2 pétalos. En el toro (a), los caminos a y b conmutan debido a la estructura de la superficie ($ab = ba$). En la rosa (b), los lazos x_1 y x_2 son independientes y no satisfacen ninguna relación.

Hemos demostrado de este modo que tenemos un objeto topológico, la rosa de n pétalos, cuyo grupo fundamental es el grupo libre F_n . Mediante esta conexión tenemos establecida una relación directa entre grupos libres y espacios topológicos, que es el objetivo que se perseguía con la noción de grupo libre. Con el Teorema de Seifert-van Kampen, descompusimos un espacio en partes elementales conocidas. Sin embargo, nuestro objetivo central exige comprender la estructura no solo del grupo libre, sino de sus *subgrupos*. Llegados a este punto, es natural plantearse la siguiente cuestión: si el grupo libre equivale topológicamente a la rosa de pétalos, ¿qué objeto topológico encarna a sus subgrupos? Resulta anti-intuitivo descubrir que la respuesta no se halla buscando *subespacios* dentro de la rosa, sino estudiando aquellos espacios que la *envuelven*. En lo que resta de capítulo, recorreremos este camino inverso, guiados por las siguientes preguntas:

Dado un espacio topológico arbitrario, ¿cómo podemos recubrirlo? Y en tal caso, ¿qué relación algebraica se establece entre sus respectivos grupos fundamentales?

3.2 Espacios Recubridores y Levantamientos

La idea de espacio recubridor es la de un espacio E que envuelva nuestro espacio X de manera que la estructura global de E sea más simple o nos permita simplificar su análisis.

Ejemplo 3.2.1. Uno de los ejemplos canónicos es la recta real $\mathbb{R}$, que recubre la circunferencia mediante la aplicación $p(t) = e^{2\pi it}$. Esta aplicación *enrolla* la recta infinitas veces sobre la circunferencia, asociando a cada intervalo $[n, n+1]$ a una vuelta completa.

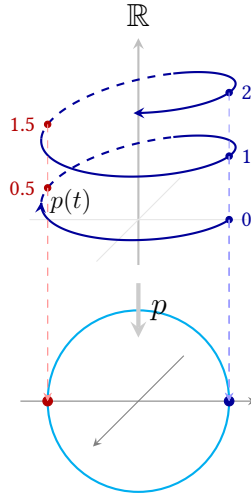


Figura 3.9: Visualización del recubrimiento $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $p(t) = e^{2\pi it}$.

3.2.1 Espacios recubridores

Así, deberemos ser capaces de establecer las características de las aplicaciones que permitan desarrollar esta idea. Comencemos definiendo este concepto.

Definición 3.2.2 (Aplicación de recubrimiento). Sean X y E dos espacio topológicos, una aplicación continua $p : E \rightarrow X$, decimos que p es una *aplicación recubridora* o *de recubrimiento* si:

I: p es sobreyectiva

II: Para cada $x \in X$, existe un entorno abierto U de x tal que $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$ con:

- $\forall i \in I, V_i$ abierto de E .
- $\forall i, j \in I, i \neq j, V_i \cap V_j = \emptyset$.
- $\forall i \in I, p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Observación 3.2.3. En estas condiciones, decimos que E es el *espacio recubridor* o *de recubrimiento* y a los abiertos U se los conoce como *abiertos distinguidos*, *trivializantes* o *regularmente cubierto*, nosotros haremos uso de esta primera denominación.

A partir de la definición podemos extraer ciertos resultados que serán de utilidad.

Proposición 3.2.4. Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación recubridora, entonces se verifica:

I: p es una aplicación abierta y en particular homeomorfismo local.

II: La topología τ_X de X es la topología cociente τ_c dada por la aplicación p .

Demostración. En primer lugar, sea $A \subseteq E$ un abierto. Para ver que p es abierta, debemos probar que $p(A)$ es abierto en X . Sea $x \in p(A)$, existe $e \in A$ tal que $p(e) = x$. Por ser p recubridora, existe un abierto distinguido U tal que $x \in U$ y $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$. Sea V_j la componente que contiene a e . Puesto que A y V_j son abiertos en E , su intersección $A \cap V_j$ es un abierto en V_j . Como $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo, la imagen $p(A \cap V_j)$ es un abierto en U (y por tanto en X). Dado que $x \in p(A \cap V_j) \subseteq p(A)$, hemos encontrado un entorno abierto de x contenido en $p(A)$, luego $p(A)$ es abierto.

Para ver la segunda de las propiedades, recordemos que p induce la topología cociente si p es sobreyectiva, continua y una aplicación abierta [Mun02, Teorema 22.1]. Por el apartado anterior, p es abierta y sobreyectiva por definición, luego la topología de X coincide con la identificación por p . $\square$

Observación 3.2.5. La propiedad II del lema establece una relación entre homeomorfismos y aplicación de recubrimiento en la que debemos deternos brevemente para examinarla.

Proposición 3.2.6. Sea $f : E \rightarrow X$ un homeomorfismo, entonces f es aplicación de recubrimiento.

Demostración. Por la definición de homeomorfismo, tenemos que tomando $\forall x \in X, U = X$ se verifica que:

- f es sobreyectiva, pues es homeomorfismo.
- Tenemos que $\forall x \in X, f^{-1}(U) = E$, que verifica las condiciones de abierto trivializante pues
 - E es abierto de E .
 - Al considerar únicamente $U = X$, no hay con quien intersectar
 - La restricción coincide con f , que es homeomorfismo por suposición.

$\square$

Así, hemos demostrado que *homeomorfismo* $\implies$ *aplicación de recubrimiento*, sin embargo, no se da la equivalencia, como se ilustra en los siguiente ejemplos.

Ejemplo 3.2.7. Tomando la inclusión $i : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, es un homeomorfismo local, aplicación abierta pero no de recubrimiento pues no es sobreyectiva. Lo cual parece coherente con la idea de *recubrir* nuestro espacio, pues $\mathbb{R}_0 \subsetneq \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.8. Consideramos $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi it}$ y tomemos como referencia la Figura 3.9, donde se tomaba todo $\mathbb{R}$. Esta aplicación es sobreyectiva y un homeomorfismo local. Sin embargo, en contraposición al Ejemplo 3.2.1, para el punto $x_0 = (1, 0) = p(1) = p(2) \dots$, cualquier entorno abierto distinguido U debería tener una preimagen formada por una unión disjunta de abiertos V_i homeomorfos a U .

No obstante, dado que el dominio está restringido a $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$, la preimagen $p^{-1}(U)$ siempre contendrá un intervalo de la forma $V_0 = (0, \epsilon)$ cerca del origen. Al restringir la aplicación p a este conjunto V_0 , la imagen $p(V_0)$ es únicamente un medio arco que parte de x_0 en sentido antihorario, cubriendo solo la mitad superior de U . En consecuencia, $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ no es sobreyectiva y, por ende, no puede ser un homeomorfismo.

Un término que toma especial relevancia en el estudio de espacios recubridores es el conjunto $p^{-1}(x_0)$,

Definición 3.2.9. Sean X, E dos espacios topológicos, $p : E \rightarrow X$ una aplicación de recubrimiento. Sea $x_0 \in X$, al conjunto $p^{-1}(x_0)$ se le conoce como *fibra* sobre x_0 .

Ésta representa el conjunto de puntos en el espacio recubridor E que se proyectan sobre el punto base x_0 . Entre otras propiedades, en la siguiente proposición comprobamos que todas las fibras tienen el mismo cardinal.

Proposición 3.2.10. Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación de recubrimiento, entonces para cada $x, y \in X$ se verifica que $\#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(y)$.

Demostración. Definamos la siguiente aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = \#p^{-1}(x)$. Para ver que f es constante, tomemos $x, y \in X$ y un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Por ser p una aplicación de recubrimiento, existe un levantamiento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dado que $\tilde{\gamma}$ es continua y $[0, 1]$ es conexo, la imagen $\tilde{\gamma}([0, 1])$ es un conjunto conexo en E . Además, como p es una aplicación de recubrimiento, cada punto en la fibra $p^{-1}(x)$ tiene un entorno abierto en E que se proyecta de manera homeomorfa sobre un entorno de x en X . Esto implica que el número de puntos en la fibra sobre cualquier punto de X debe ser el mismo, ya que el levantamiento $\tilde{\gamma}$ conecta las fibras sobre x e y . Por lo tanto, concluimos que $\#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(y)$ para todos los puntos $x, y \in X$, lo que demuestra que el número de puntos en cada fibra es constante a lo largo de X . $\square$

3.2.2 Levantamientos

Hasta ahora hemos respondido a una de los dos preguntas con las que iniciamos la sección. Efectivamente, la aplicación recubridora nos permite establecer cierta relación entre dos espacios topológicos. Sin embargo, no hemos hecho referencia alguna al grupo fundamental. En la introducción a la Definición 2.2.11 vimos como los lazos de un espacio son los que determinan su grupo de fundamental, por ello, introduciremos el concepto de *levantamiento*. La idea es clara: Estudiar la estructura que toman los caminos del espacio original sobre el espacio recubridor. De este modo, avanzaremos en la relación que queremos establecer entre $\pi_1(X)$ y $\pi_1(E)$

Definición 3.2.11 (Levantamiento). Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación continua. Dado un espacio topológico Y y una aplicación continua $f : Y \rightarrow X$, un *levantamiento* de f es una aplicación continua $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Esta relación se visualiza mediante el requisito de que el siguiente diagrama conmutativo se cierre adecuadamente:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

En nuestro contexto, Y será frecuentemente el intervalo unitario $[0, 1]$ (cuando f sea un camino o lazo) o el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ (cuando f sea una homotopía).

Es importante realizar una serie de observaciones acerca del levantamiento de caminos.

Observación 3.2.12. La relación que exige $p \circ \tilde{f} = f$ no garantiza la existencia del inverso $\tilde{f} = p^{-1} \circ f$, solo la conmutatividad del diagrama.

Observación 3.2.13. El levantamiento de un lazo no es necesariamente un lazo. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es un lazo con base en x_0 , su levantamiento $\tilde{\gamma}$ comenzará en un punto $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sin embargo, el extremo final $\tilde{\gamma}(1)$ solo tiene que cumplir que $p(\tilde{\gamma}(1)) = x_0$, es decir, terminará en *algún* punto de la fibra sobre x_0 , pero no tiene por qué ser el mismo e_0 .

Parece entonces un paso razonable intentar definir unas condiciones bajo las cuales podamos afirmar la *existencia* del levantamiento y también, en caso de existir, su *unicidad*. Enunciamos así los siguientes resultados, cuyas demostraciones se encuentran en el Apéndice B.

Lema 3.2.14 (Criterio de levantamiento). *Sea $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicación de recubrimiento y sea Y un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Una aplicación continua $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ admite un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ si y solo si se cumple:*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad (3.5)$$

Lema 3.2.15 (Unicidad de levantamiento). *Sean X un espacio topológico, $p : E \rightarrow X$ una aplicación de recubrimiento y $f : Y \rightarrow X$ una aplicación continua con Y conexo. Si tomamos $x_0 \in X, y_0 \in Y, e_0 \in E$ tales que $f(y_0) = x_0 = p(e_0)$. Si Y es conexo, entonces $\tilde{f}$ es única.*

Observación 3.2.16. Los resultados dados están asociados a los caminos del espacio topológico. En este sentido, podemos dar sus equivalentes para homotopías: si dos caminos γ_1 y γ_2 son homótopos en X , la homotopía que los relaciona también se levanta a E . En consecuencia, sus respectivos levantamientos $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ (con el mismo origen) serán homótopos en E y, por tanto, terminarán exactamente en el mismo punto de la fibra.

Recobrando la noción algebraica de los preliminares, podemos continuar en el camino de profundizar en la relación entre los espacios topológicos y los grupos fundamentales.

Definición 3.2.17 (Homomorfismo inducido). La aplicación continua $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ induce un homomorfismo de grupos $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ definido por la composición de lazos: $p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}]$.

De la definición y de las propiedades de levantamiento podemos establecer directamente el siguiente resultado, que nos acerca definitivamente a la respuesta que buscábamos.

Proposición 3.2.18. *El homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ inducido por la aplicación de recubrimiento $p : E \rightarrow X$ es inyectivo. Adicionalmente, se cumple que:*

$$[\sigma] \in p_*(\pi_1(E, e_0)) \iff \tilde{f}(\sigma) \in \pi_1(E, e_0) \quad (3.6)$$

es decir, la imagen del subgrupo $p_(\pi_1(E, e_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$ está formada exactamente por las clases de homotopía de lazos en X basados en x_0 cuyos levantamientos en E con base en e_0 son también lazos.*

Demostración. Para demostrar la inyectividad, tomemos una clase de homotopía $[\tilde{\gamma}] \in \ker(p_*)$. Esto significa que $p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}] = [c_{x_0}]$, donde c_{x_0} es el lazo constante en x_0 .

Por definición, existe una homotopía $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ que deforma el lazo $p \circ \tilde{\gamma}$ en el lazo constante c_{x_0} . Utilizando la propiedad de levantamiento de homotopías (Observación 3.2.16), esta homotopía F se levanta a una homotopía única $\tilde{F}$ en E que comienza en $\tilde{\gamma}$. Dado que el levantamiento del lazo constante c_{x_0} (que empieza en e_0) es el lazo constante c_{e_0} por la unicidad del levantamiento, concluimos que $\tilde{F}$ es una homotopía entre $\tilde{\gamma}$ y c_{e_0} . Por lo tanto, $[\tilde{\gamma}] = [c_{e_0}]$, el elemento neutro de $\pi_1(E, e_0)$. Al tener un núcleo trivial, p_* es inyectivo.

La caracterización de la imagen se sigue directamente de la Observación 3.2.13: un lazo se mapea dentro del subgrupo si y solo si su levantamiento logra *cerrarse* en e_0 . $\square$

Esta inyectividad nos permite identificar algebraicamente el grupo fundamental del recubridor con un subgrupo del grupo fundamental de la base: $H = p_*(\pi_1(E, e_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$.

3.2.3 Recubridor Universal

De los resultados anteriores se deduce un caso particular de especial relevancia. Si el espacio recubridor E es simplemente conexo, entonces su grupo fundamental es trivial, por lo que su imagen será el subgrupo trivial $H = \{e\}$. Este recubridor maximal recibe el nombre de *recubridor universal*.

Definición 3.2.19 (Recubridor Universal). Un espacio recubridor $p : E \rightarrow X$ se denomina *recubridor universal* de X si E es conexo por caminos y simplemente conexo ($\pi_1(E) \cong \{e\}$).

La noción de universalidad viene motivada por la siguiente proposición:

Proposición 3.2.20. Sean E, F y X espacios topológicos conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación de recubrimiento con E simplemente conexo. Dada cualquier aplicación recubridora $r : F \rightarrow X$, entonces existe una aplicación recubridora $q : E \rightarrow F$ tal que $r \circ q = p$.

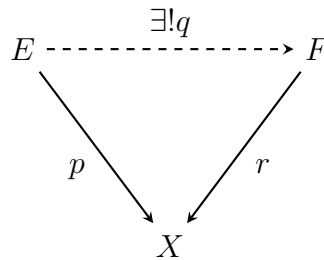


Figura 3.10: Diagrama conmutativo que ilustra la propiedad universal del recubridor universal E . Cualquier otro recubridor F es recubierto por E .

Ahora bien, probablemente la pregunta más natural que podemos hacernos es:

¿cuándo existe este recubridor universal?

Démosle respuesta.

Definición 3.2.21 (semilocalmente simplemente conexo). Sea X un espacio topológico, decimos que X es *semilocalmente simplemente conexo* si $\forall x \in X, \exists U$ entorno abierto de x tal que, para todo lazo basado en x contenido en U se verifica que este es homótopo en X al lazo constante en x .

Para ilustrar esta noción recurrimos a los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.2.22. Cualquier variedad diferenciable es un espacio semilocalmente simplemente conexo. En estos espacios, todo punto posee un entorno contráctil, por lo que cualquier lazo contenido en él se contrae a un punto de manera trivial, cumpliendo la definición.

Ejemplo 3.2.23 (El Pendiente Hawaiano). Consideremos el *pendiente hawaiano*, definido como la unión infinita de circunferencias C_n de radio $1/n$ tangentes en el origen, es decir, centradas en $(1/n, 0)$. Si tomamos el punto base $x_0 = (0, 0)$, cualquier entorno abierto U de x_0 , por pequeño que sea, contendrá infinitas circunferencias completas C_k (para k suficientemente grande). Un lazo que recorra una de estas circunferencias C_k contenidas en U no puede contraerse al punto base ni dentro de U , ni dentro del espacio total X .

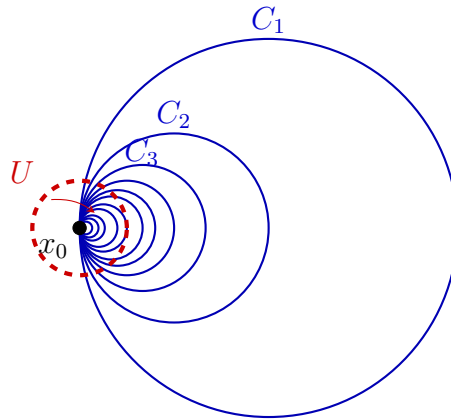


Figura 3.11: El pendiente hawaiano. Cualquier entorno abierto U del punto base x_0 encierra completamente infinitas circunferencias C_k (con k suficientemente grande). Los lazos que recorren estas circunferencias no son contráctiles, lo que impide que el espacio sea semilocalmente simplemente conexo.

Observación 3.2.24. Cabe preguntarse si, al existir el término *semilocalmente simplemente conexo*, es posible que haya un espacio *localmente simplemente conexo*. La respuesta es afirmativa. Esta es una propiedad más fuerte que la primera, pues exige que cada punto tenga un entorno abierto U tal que cualquier lazo contenido en U se contraiga a un punto dentro de U mismo, no solo dentro del espacio total. La implicación es tal que *localmente simplemente conexo* $\implies$ *semilocalmente simplemente conexo*, pero no al revés. De hecho, el pendiente hawaiano del Ejemplo 3.2.23 de espacio que es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo, ya que cada punto tiene entornos donde los lazos se contraen en el espacio total, pero no dentro de esos entornos.

Así pues enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.25. Sea X un espacio topológico. X admite recubridor universal si, y solamente si X es semilocalmente simplemente conexo.

Observación 3.2.26. Aunque omitimos la demostración formal por su longitud técnica, es importante entender cómo se construye este recubridor universal. Si asumimos que existe, la propiedad de unicidad de levantamiento (Lema 3.2.15) es de gran utilidad, pues los puntos del recubridor E se construyen como las *clases de homotopía de caminos* en X que parten del punto base x_0 . Esto quiere que, un punto $\tilde{x} \in E$ es en realidad un camino $[\gamma]$ en la base, y la proyección natural es simplemente evaluar el final del camino: $p([\gamma]) = \gamma(1)$. La condición de ser *semilocalmente simplemente conexo* es exactamente la pieza técnica requerida para poder dotar a este conjunto de caminos de una topología válida que convierta a la proyección p en un homeomorfismo local, evitando que las hojas del recubridor se *peguen* como ocurre en el pendiente hawaiano (Ejemplo 3.2.23).

3.2.4 Correspondencia de Galois

Finalmente, llegamos al resultado que corona la teoría de espacios recubridores. Del mismo modo que el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois establece una dualidad entre subcuerpos y subgrupos, en topología algebraica existe un paralelismo entre espacios recubridores y subgrupos del grupo fundamental. De hecho, recibe su nombre precisamente de esta similitud.

Teorema 3.2.27 (Correspondencia de Galois para recubridores). *Sea X un espacio conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Fijado un punto base $x_0 \in X$, existe una biyección entre:*

- *El conjunto de clases de isomorfismo de espacios recubridores conexos por caminos $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$.*
- *El conjunto de subgrupos $H \leq \pi_1(X, x_0)$.*

Observación 3.2.28. Mediante este resultado, dado un subgrupo cualquiera $H \leq \pi_1(X, x_0)$, podemos garantizar que $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ para algún espacio recubridor E único salvo isomorfismo. En particular, si $H = \{e\}$, el espacio E asociado es el recubridor universal. Como habíamos anticipado, esta biyección invierte el orden: subgrupos más pequeños corresponden a recubridores topológicamente más *grandes*.

Cerramos este capítulo con el esquema completo para abordar nuestro teorema. Hemos demostrado que el grupo libre es, topológicamente, la rosa de n pétalos (Proposición 3.1.10). Además, por la correspondencia de Galois, sabemos que entender un *subgrupo* del grupo libre es equivalente a estudiar un espacio recubridor de la rosa. Así, el último paso que queda es precisamente esto, ¿*qué espacios recubren la rosa de n pétalos?*

Grafos Topológicos

Tal y como acabamos de concluir en el capítulo anterior, la clave para entender los subgrupos de un grupo libre reside en clasificar los espacios que recubren a la rosa de n pétalos. Para poder determinar las propiedades topológicas y algebraicas de estos recubridores, necesitamos formalizar el entorno en el que trabajaremos. Por ello, introduciremos a continuación los grafos topológicos y avanzaremos en su construcción hasta el lema que concluye los recursos necesarios para realizar la demostración del Teorema de Nielsen-Schreier en el siguiente capítulo.

4.1 Complejos y Grafos Topológicos

Para construir formalmente la noción de grafo topológico es necesario introducir previamente el concepto de complejos. La visualización del paso de grafo geométrico, entendido como un conjunto de aristas y vértices al grafo topológico se sigue de dotar a estos conjuntos de una estructura que podamos tratar como un espacio topológico. En este sentido, definimos los n -*símplices*.

Definición 4.1.1 (n -símplice). Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, un conjunto de $n + 1$ puntos afinmente independientes¹ en algún $\mathbb{R}^m$, $m \geq n$. Definimos el n -símplice Δ^n como el conjunto de puntos x que se pueden escribir como combinación convexa de los x_i , es decir, $x = \sum_{i=0}^n t_i x_i$ con $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Formalmente:

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n t_i x_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \quad (4.1)$$

Así, una vez tenemos definida nuestra *unidad básica*, podemos proseguir en nuestra tarea ensamblando estas piezas, dando lugar a la definición de *complejo simplicial*.

Definición 4.1.2 (Complejo simplicial). Dado un conjunto de símplices en $\mathbb{R}^m$, llamamos *complejo simplicial* a una colección K de símplices tal que se satisface:

- Toda cara de un símplice de K pertenece también a K .
- La intersección de dos símplices de K o bien es vacía, o es una cara común a ambos.

¹Un conjunto de puntos se dice *afinmente independiente* si el conjunto de vectores asociados $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ es linealmente independiente. Equivalentemente, si ningún punto está en el subespacio afín generado por los demás

La *dimensión* del complejo es el máximo de las dimensiones de los símlices que lo componen.

Ejemplo 4.1.3. De manera natural podemos desear que las figuras geométricas y variedades con las que trabajamos sean homeomorfas a complejos simpliciales, pues desde el punto de vista topológico facilita enormemente su estudio analítico y computacional. En este sentido, el *teorema de triangulación de superficies* [Rad25] nos indica que toda superficie compacta puede construirse mediante triángulos, es decir, es homeomorfa a un complejo simplicial bidimensional².

Observación 4.1.4. Los complejos simpliciales resultan ser una herramienta excesivamente rígida si nuestro objetivo es generalizar la noción geométrica de grafo. Esto se debe a que la definición exige que la intersección de dos símlices sea vacía o exactamente una cara común. Por ejemplo, para triangular una simple circunferencia $\mathbb{S}^1$ como un complejo simplicial de dimensión 1, necesitamos al menos tres vértices y tres aristas (un triángulo). Sin embargo, topológicamente es mucho más natural y eficiente pensar en la circunferencia como un único vértice al que se le adjunta una única arista cuyos dos extremos se pegan en dicho vértice (un lazo).

Para dotar a nuestros espacios de esta flexibilidad geométrica y evitar triangulaciones redundantes, damos el salto a los complejos CW (*Closure-Finite Weak-Topology*), introducidos por J. H. C. Whitehead en 1949 [Whi49]. En lugar de utilizar símlices rectos, esta categoría permite construir espacios adjuntando *celdas* topológicas continuas, formalizando la noción constructiva mediante esqueletos.

Definición 4.1.5 (Esqueleto y Complejo CW). Un espacio topológico X es un *complejo CW* si puede construirse de manera inductiva mediante una sucesión de subespacios X^n , denominados *n-esqueletos*, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. El 0-esqueleto X^0 es un espacio discreto, es decir, un conjunto de puntos que llamaremos *0-celdas*.
2. El n -esqueleto X^n se forma adjuntando una familia de *n-celdas* (homeomorfas a discos cerrados D^n) al esqueleto de dimensión inferior X^{n-1} . Esto se realiza a través de aplicaciones continuas $\varphi_\alpha : \partial D^n \rightarrow X^{n-1}$, conocidas como *aplicaciones de adjunción*.

El espacio total X se define como el límite directo (o unión) de todos sus esqueletos, $X = \bigcup_n X^n$, dotado de la topología débil: un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si $A \cap \overline{e_\alpha}$ es cerrado para la clausura de cada celda e_α .

Así, para el objetivo de este capítulo, que era la noción de *grafo topológico*, nos podemos restringir al caso de dimensión 1, de este modo definimos.

Definición 4.1.6 (Grafo topológico). Un *grafo topológico* es un complejo CW de dimensión 1. Está formado únicamente por un conjunto discreto de vértices (0-celdas) y un conjunto de aristas (1-celdas homeomorfas a intervalos $[0, 1]$), cuyos extremos se pegan a los vértices.

Generalizamos así la noción de grafo combinatorio, permitiendo la existencia de aristas múltiples entre dos vértices y lazos (aristas cuyos dos extremos se pegan al mismo vértice). En

²Por el contrario, gracias a Markov [Mar58], sabemos que el problema general del homeomorfismo es indecidible para variedades de dimensión mayor o igual a 4.

matemática discreta es habitual excluir este tipo de situaciones con la definición de grafo *simple*, sin embargo, notemos que la propia rosa de n pétalos que estudiamos en el Capítulo 3 es un grafo topológico con un único vértice y n aristas en forma de lazo.

4.2 Árboles Maximales y el Grupo Fundamental de un Grafo

Dentro de la teoría de grafos, son de especial interés histórico y analítico los conocidos como grafos *eulerianos*³ y *hamiltonianos*⁴. Aunque no profundizaremos en el estudio detallado de estos conceptos, es destacable la profunda asimetría que presentan en la ciencia de la computación actual y su estrecha relación con la complejidad algorítmica. Mientras que el problema de determinar si un grafo es euleriano fue resuelto por Leonhard Euler en 1736 (dando origen formal a la teoría de grafos con el célebre problema de los puentes de Königsberg) y cuenta con algoritmos de resolución en tiempo polinomial (P), el problema de determinar si un grafo es hamiltoniano representa un problema NP -completo. Este último constituye uno de los problemas fundamentales en la teoría de la complejidad para los cuales aún no se conoce una solución eficiente generalizada.

Por otro lado, existe una subfamilia de grafos que resulta ser el elemento estructural primordial para el estudio algebraico que nos ocupa en este capítulo: los *árboles*. Geométricamente, un árbol representa el *esqueleto* minimal de un grafo; es una subestructura que mantiene la conectividad del espacio original pero elimina cualquier tipo de redundancia, que viene comprendida por el concepto de los ciclos de un grafo. Esta ausencia absoluta de lazos implica que, desde el punto de vista homotópico, un árbol no posee *agujeros* y, por tanto, puede contraerse continuamente hasta un único punto. Veremos que todo grafo conexo contiene un árbol que abarca todos sus vértices, lo cual nos permitirá concentrar toda la complejidad del grupo fundamental exclusivamente en las aristas que quedan fuera de dicho árbol.

Definición 4.2.1 (Árbol y Árbol Maximal). Un grafo topológico T se dice que es un *árbol* si es un espacio contráctil (esto es, conexo y sin ciclos, por lo que su grupo fundamental es trivial, $\pi_1(T) \cong \{e\}$). Dado un grafo conexo X , un *árbol maximal* en X es un subgrafo $T \subseteq X$ que es un árbol y que contiene todos los vértices del grafo original X .

Observación 4.2.2. Como trataremos en el Apéndice A, la existencia del árbol maximal viene garantizada por el Lema de Zorn, que es equivalente al axioma de elección. De aquí observamos que esta demostración del teorema se sustenta en el axioma de elección y que la utilización de un modelo como Zermelo-Fraenkel en el que no se asume lleva precisamente a que el teorema sea falso.

Dando los últimos pasos necesarios hacia el objetivo de este trabajo, demostramos a continuación que, precisamente, el grupo fundamental de un grafo topológico es un grupo libre.

Teorema 4.2.3 (El Grupo Fundamental de un Grafo). *El grupo fundamental de todo grafo topológico conexo X es un grupo libre.*

³Un grafo es *euleriano* si contiene un *circuito euleriano*, es decir, un camino cerrado que recorre cada arista del grafo exactamente una vez.

⁴Un grafo es *hamiltoniano* si contiene un *ciclo hamiltoniano*, que es un camino cerrado que visita cada vértice del grafo exactamente una vez.

Demostración. Sea $T \subseteq X$ un árbol maximal del grafo X . Como T es un subcomplejo contráctil, el espacio cociente X/T (obtenido al colapsar todo el árbol T a un único punto) es homotópicamente equivalente a X , es decir, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$.

Al colapsar T , todos los vértices de X (que por definición de árbol maximal están en T) se identifican en un único vértice v_0 en el cociente X/T . ¿Qué ocurre con las aristas de X que no pertenecían a T ? Cada una de estas aristas externas $e_\alpha \in X \setminus T$ tenía sus dos extremos en los vértices de T . Al colapsar T a v_0 , ambos extremos de e_α se pegan en v_0 , convirtiendo a cada arista externa en un lazo cerrado.

En consecuencia, el espacio cociente X/T consta de un único vértice v_0 y de un conjunto de lazos formados por las aristas de $X \setminus T$. Por definición, este espacio no es otra cosa que una rosa de pétalos. Como demostramos rigurosamente en la Proposición 3.1.10 utilizando el Teorema de Seifert-van Kampen, el grupo fundamental de una rosa de pétalos es exactamente un grupo libre, donde los generadores algebraicos están en biyección con las aristas no contenidas en el árbol maximal. $\square$

Ejemplo 4.2.4. Consideremos un grafo topológico X formado por los vértices y aristas de un cuadrado junto con una de sus diagonales. Sean los vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Este espacio posee un total de 5 aristas. Para calcular su grupo fundamental, seleccionamos un árbol maximal $T \subseteq X$. Recordemos que T debe contener todos los vértices de X pero ningún ciclo. Elegimos, por ejemplo, el subcomplejo formado por el camino $v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$.

Observamos que en $X \setminus T$ quedan exactamente dos aristas excluidas del árbol: la arista superior e_1 (que conecta v_4 con v_3) y la diagonal e_2 (que conecta v_1 con v_3). Bajo la aplicación cociente $p : X \rightarrow X/T$, colapsamos el subespacio contráctil T a un único punto v_0 . Puesto que los extremos tanto de e_1 como de e_2 pertenecían a T , la identificación pega los extremos de cada arista en el vértice común v_0 . Topológicamente, las aristas e_1 y e_2 se transforman en dos lazos cerrados independientes. El espacio resultante es homeomorfo a la rosa de dos pétalos X_2 , lo que demuestra de manera constructiva que $\pi_1(X) \cong \pi_1(X_2) \cong F_2$.

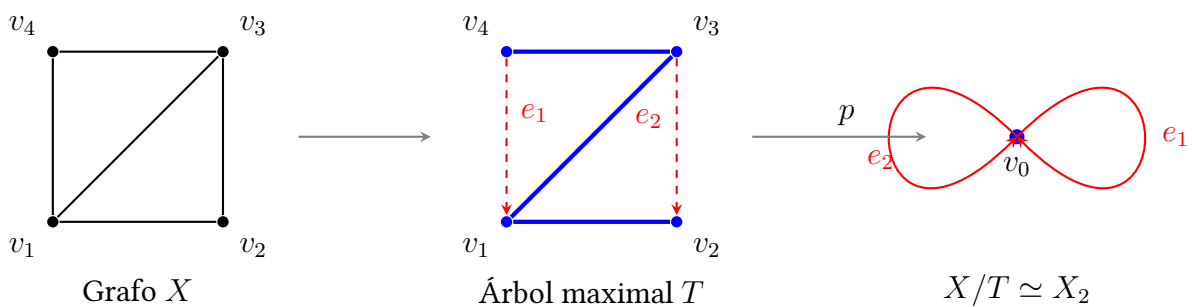


Figura 4.1: Esquema del colapso de un árbol maximal. Izquierda: Grafo original X . Centro: Elección de un árbol maximal T (azul grueso) y las dos aristas excluidas del árbol, e_1 y e_2 (rojo punteado). Derecha: Al identificar todo T en un único vértice v_0 mediante la proyección cociente p , las aristas e_1 y e_2 pasan a ser lazos cerrados, formando una rosa de dos pétalos.

4.3 El Lema Fundamental de Recubridores

Finalmente, tal y como vimos en el capítulo anterior, la Correspondencia de Galois establece una relación íntima entre los subgrupos y los espacios recubridores. Para poder garantizar que el recubridor de nuestra rosa de pétalos se comporta bien geométricamente, necesitamos el siguiente resultado, que asegura que la estructura de grafo se *levanta* inalterada a través de la proyección. La demostración puede verse en [Hat02][Lemma 1A.3]

Lema 4.3.1 (Lema Fundamental de Recubridores de Grafos). *Todo espacio recubridor de un grafo es también un grafo, cuyos vértices y aristas son, respectivamente, los levantamientos de los vértices y aristas del grafo base.*

Demostración. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ el espacio recubridor. Para los vértices de $\tilde{X}$ tomamos el conjunto discreto $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Escribiendo X como un espacio cociente de $X_0 \coprod_{\alpha} I_{\alpha}$ como en la definición de un grafo y aplicando la propiedad de levantamiento de caminos a las aplicaciones resultantes $I_{\alpha} \rightarrow X$, obtenemos un único levantamiento $I_{\alpha} \rightarrow \tilde{X}$ que pasa por cada punto de $p^{-1}(x)$, para $x \in e_{\alpha}$. Estos levantamientos definen las aristas de una estructura de grafo sobre $\tilde{X}$. La topología resultante sobre $\tilde{X}$ es la misma que su topología original, puesto que ambas topologías tienen los mismos abiertos básicos, al ser la proyección recubridora $\tilde{X} \rightarrow X$ un homeomorfismo local.

Ahora podemos aplicar lo que hemos demostrado sobre los grafos y sus grupos fundamentales para probar un resultado básico de la teoría de grupos: □

Así pues, con el Lema 4.3.1 y Teorema 4.2.3 podemos concluir el capítulo y pasar a continuación a la demostración del teorema.

El Teorema de Nielsen-Schreier

Hemos llegado al momento en el que se culmina el objetivo principal de este trabajo, la demostración del *Teorema de Nielsen-Schreier*. Para ello, hemos pasado por los tres capítulos anteriores construyendo la teoría necesaria para abordar la demostración topológica. En primer lugar, tal y como se ha mencionado en el Capítulo 1, existen versiones *algebraicas* de la demostración del teorema. Las primeras de ellas dadas por los dos autores que le dan nombre. En 1921 Nielsen demuestra el caso finitamente generado de manera puramente algebraica, haciendo uso de las llamadas *transformaciones de Nielsen*, con las que se da un algoritmo para reducir palabras de un subgrupo, llegando a que este es libre [Nie21]. Por otro lado, en 1927 Schreier publica el caso general, definiendo el concepto de *Transversal de Schreier* y los *Generadores de Schreier* [Sch27]. Así, a continuación se presenta la conocida como *demostración topológica*, basada en las conexiones que hemos construido entre la topología, el álgebra y los grafos.

5.1 Enunciado y Demostración

La idea de esta demostración es la siguiente: dado un grupo libre F , lo representamos topológicamente como el grupo fundamental de una rosa de n pétalos X . Dado un subgrupo $H \leq F$, la teoría de recubrimientos garantiza la existencia de un espacio recubridor conexo $\tilde{X}$ cuyo grupo fundamental es exactamente isomorfo a H . Por las propiedades de los recubrimientos, $\tilde{X}$ hereda la estructura de grafo topológico. Finalmente, al contraer un árbol maximal de $\tilde{X}$ a un punto, obtenemos un espacio homotópicamente equivalente que vuelve a ser una cuña de circunferencias, lo que implica directamente que su grupo fundamental, H , es libre.

Teorema 5.1.1 (Nielsen-Schreier). *Todo subgrupo de un grupo libre es, a su vez, un grupo libre.*

Demostración. Sea F un grupo libre arbitrario y sea $H \leq F$ un subgrupo cualquiera de F .

Por la equivalencia topológica demostrada en el Capítulo 3 (Proposición 3.1.10), sabemos que existe un grafo topológico X (específicamente, una rosa de pétalos o una generalización de la misma para un número arbitrario de generadores) cuyo grupo fundamental es exactamente isomorfo a nuestro grupo libre:

$$\pi_1(X) \cong F \quad (5.1)$$

Puesto que X es un grafo, cumple las condiciones de conexión requeridas por el Teorema de Correspondencia de Galois para recubridores (Teorema 3.2.27). Al aplicar este teorema al subgrupo $H \leq \pi_1(X)$, garantizamos la existencia de un espacio recubridor $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que su grupo fundamental es isomorfo al subgrupo:

$$\pi_1(\tilde{X}) \cong H \quad (5.2)$$

A continuación, invocamos el Lema Fundamental de Recubridores de Grafos (Lema 4.3.1). Dado que la base X es un grafo topológico, su espacio recubridor E es inexorablemente otro grafo topológico.

Finalmente, aplicamos el teorema del Grupo Fundamental de un Grafo (Teorema 4.2.3). Todo grafo topológico conexo posee un árbol maximal, al colapsar dicho árbol obtenemos una rosa de pétalos, y por tanto, su grupo fundamental es libre. Al aplicar esto a nuestro recubridor E , concluimos de manera irrefutable que $\pi_1(E)$ es un grupo libre. Dado que $\pi_1(E) \cong H$, se deduce de inmediato que H es un grupo libre, completando así la demostración geométrica del Teorema de Nielsen-Schreier. $\square$

Conclusiones y Reflexión Final

6.1 Conclusiones

En los capítulos que nos preceden se ha abordado y desarrollado el enfoque topológico de la demostración del Teorema de Nielsen-Schreier, haciendo gala de la profunda conexión entre el álgebra abstracta y la topología algebraica.

En primer lugar, se ha corroborado la fortaleza de los invariantes topológicos como el Grupo Fundamental, que nos permite abordar numerosos problemas en matemáticas y cuya motivación y valor es vital. Así, identificando el grupo libre F_n con el grupo fundamental de la rosa de n pétalos, mediante el Teorema de Seifert-van Kampen, se ha traducido la estructura dada por la presentación de un grupo a la entendida como problema topológico, que es mucho más tratable.

En segundo lugar, se ha explotado con éxito la correspondencia de Galois para espacios recubridores, estableciendo una biyección que asocia cada subgrupo de un grupo libre a un espacio recubridor específico. Al garantizar mediante el Lema Fundamental de Recubridores que todo recubrimiento de un grafo topológico hereda la estructura de grafo, la complejidad algebraica ha quedado reducida a un problema de retracción topológica. La contracción del árbol maximal del grafo recubridor hacia un único vértice demuestra formalmente que el espacio cociente es homotópicamente equivalente a una rosa de n pétalos, probando de manera categórica que su grupo fundamental, y por consiguiente, el subgrupo original, es estrictamente libre.

6.2 Reflexión final

La elección del tema de este Trabajo Fin de Grado estuvo fuertemente marcada por el carácter transversal que constituía su redacción. Aunque los términos expuestos no fueran en su mayoría más que una extensión de conceptos vistos en el Grado, su interiorización, comprensión y conexión han supuesto todo un proceso formativo que culmina de manera extraordinaria, en mi opinión, el proceso que ha de llevar un Matemático. Parafraseando a mi director, el aprendizaje más valioso que nos llevamos de esta etapa es aprender a ver el mundo con ojos matemáticos. Cuestionarse, pensar e intentar dar lógica y rigor a lo que nos rodea excede del mundo académico y formal, es un requerimiento y sin duda alguna, nuestro deber, en más facetas de las que mucha gente, ajena a este mundo, piensa.

Escribir este texto representa el cierre de una etapa universitaria de máxima exigencia. Durante estos últimos años, he sido un privilegiado que ha podido estudiar los que, bajo mi punto de

vista, son los grados más bonitos y difíciles que hay, como son matemáticas y física. Gracias a estos años, me he formado como persona y como científico, poniendo ahora mis objetivos en dedicar mi vida a la Ciencia, del mismo modo aquellos que nos precedieron y con suerte, como harán una serie de posibles futuros alumnos posteriormente.

Me gustaría destacar la gran labor que se hace en las Facultades de Ciencia de todo el mundo y que, por lástima, es invisible a una gran parte de la población. Ojalá que este texto sirva para que, aunque sea un poco, se valore la Ciencia, porque sin ella, no entenderíamos el mundo que nos rodea. Concluyo este camino como empezó y como se ha desarrollado, con pasión y haciendo referencia a una cita que desde que la conocí¹ me marcó y me hizo reflexionar acerca del valor de perseguir nuestros sueños.

“A ship in harbor is safe, but that is not what ships are built for”

John A. Shedd

¹Esto se lo debo a Fran, otro buen amigo que no puedo dejar de mencionar. Es una de las mejores personas que me he llevado de este camino por la Universidad y que sin duda, le estaré eternamente agradecido.

Bibliografía

- [AHS04] Jiří Adámek, Horst Herrlich y George E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Heldermann Verlag, 2004 (cit. en [pág. 10](#)).
- [Adi57] Sergei I. Adian. “Unsolvability of some algorithmic problems in the theory of groups”. En: *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* 6 (1957), págs. 231-298 (cit. en [pág. 9](#)).
- [Alc23] David Ignacio Alcántara García. “Formalización del algoritmo de división multivariada en Lean 4”. Tesis de maestría. Sep. de 2023 (cit. en [pág. iii](#)).
- [Ale05] P. S. Alexandrov. *Introducción a la teoría de grupos*. Editorial URSS, 2005 (cit. en [pág. 3](#)).
- [Cay54] Arthur Cayley. *On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\Theta^n = 1$* . University Press, Cambridge, 1854 (cit. en [pág. 3](#)).
- [Gal46] Évariste Galois. “Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux”. En: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1846). Presentado a la Academia de Paris en 1831. Publicado de manera póstuma en 1846. (cit. en [pág. 3](#)).
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002 (cit. en [págs. 10, 19, 20, 37](#)).
- [Kam33] Egbert R. Van Kampen. “On the Connection between the Fundamental Groups of Some Related Spaces”. En: *American Journal of Mathematics* 55 (1933), págs. 261-267 (cit. en [pág. 19](#)).
- [Mar58] A. Markov. “Insolubility of the problem of homeomorphy”. En: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 121 (ene. de 1958) (cit. en [pág. 34](#)).
- [Mas91] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Vol. 127. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1991 (cit. en [págs. 3, 20](#)).
- [Mun02] James R. Munkres. *Topología*. Trad. por Ángel Ferrández. 2.^a ed. Alhambra, 2002, [pág. 624](#) (cit. en [págs. 13, 20, 27](#)).
- [Nie21] J. Nielsen. “Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien. (Über das Rechnen mit nicht-vertauschbaren Faktoren und dessen Anwendung in der Gruppentheorie.)” En: *Mat. Tidsskr. B* 1921 (1921), págs. 78-94 (cit. en [págs. 2, 39](#)).
- [Rab58] Michael O. Rabin. “Recursive Unsolvability of Group Theoretic Problems”. En: *Annals of Mathematics* 67 (1958), págs. 172-194 (cit. en [pág. 9](#)).
- [Rad25] Tibor Radó. “Über den Begriff der Riemannschen Fläche”. En: *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum* 2 (1925), págs. 101-121 (cit. en [pág. 34](#)).
- [Sch27] Otto Schreier. “Die Untergruppen der freien Gruppen”. En: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5 (1927), págs. 161-183. DOI: [10.1007/BF02952517](#) (cit. en [págs. 2, 39](#)).
- [Sei31] H. Seifert. *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*. Tesis. Hirzel, 1931 (cit. en [pág. 19](#)).

- [Sti93] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. 2nd. Vol. 72. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1993 (cit. en pág. 10).
- [Tve80] Helge Tverberg. “A Proof of the Jordan Curve Theorem”. En: *Bull. London Math. Soc.* 12 (ene. de 1980). DOI: [10.1112/blms/12.1.34](https://doi.org/10.1112/blms/12.1.34) (cit. en pág. 11).
- [Whi49] John HC Whitehead. “Combinatorial homotopy I”. En: *Bull. Amer. Math. Soc* 55 (1949), págs. 213-245 (cit. en pág. 34).

APÉNDICES

Nota

El primer apéndice constituye una extensión del cuerpo principal del trabajo que podría darse por concluido tras la demostración topológica del Teorema de Nielsen-Schreier. El objetivo de esta adición es explorar una vertiente fundamental de las matemáticas como es la lógica. Así, se busca aportar un grado de originalidad doble: por un lado, a través del estudio histórico-bibliográfico del Axioma de Elección y sus implicaciones topológicas; por otro, mediante la implementación rigurosa de la demostración en Lean 4. Este lenguaje de programación es un asistente interactivo muy fuertemente ligado a la lógica y que busca computar el lenguaje natural de las matemáticas. Así, no nos adentraremos en profundidad en los aspectos abordados porque no entra dentro del enfoque principal y además, podrían constituir un TFG en sí mismos. De hecho; acerca del axioma de elección, encontramos una extensa bibliografía para consultar. Sin embargo, de Lean 4 la información es notablemente inferior y, además de la documentación oficial, se ha hecho uso de [Alc23], Trabajo de Fin de Máster que aborda la formalización en Lean 4 y explica de manera magnífica el funcionamiento de este lenguaje.

Sobre el axioma de elección y su Formalización

El desarrollo de los capítulos anteriores nos ha conducido, desde la definición algebraica y planteamiento del Teorema de Nielsen-Schreier, hasta su culminación por un camino topológico mediante el grupo fundamental de la rosa de n pétalos. Desde el punto de vista *clásico*, el problema matemático está resuelto y, por tanto, el trabajo podría darse por finalizado. Sin embargo, hay un detalle que no debe pasar desapercibido desde la comprensión axiomática de las matemáticas. En la Observación 4.2.2 apuntamos que la existencia de un árbol maximal no está garantizada por sí sola, sino que es consecuencia directa del Lema de Zorn, el cual es equivalente al axioma de elección. En este capítulo analizaremos el papel histórico y estructural que juega este axioma en las matemáticas, en la topología de recubrimientos, y culminaremos con la formalización computacional de nuestra proposición central utilizando el asistente de demostraciones Lean 4.

A.1 El axioma de elección

Entre las profundas consecuencias de trabajar en una teoría de conjuntos desprovista del axioma de elección se encuentra el hecho de que el teorema que ha sido objeto central de este trabajo resulta ser falso en su versión más general. Exploraremos la razón subyacente a este fenómeno.

Si bien es cierto que en ocasiones la aparición de este axioma emerge de profundas relaciones matemáticas, en la demostración del Teorema 5.1.1, el paso crítico consistió en afirmar que el espacio recubridor $\tilde{X}$ (que es un grafo conexo) posee un árbol maximal T , lo cual es una afirmación explícita del axioma de elección. Si el subgrupo H tiene índice finito en el grupo libre F_n , entonces el recubridor $\tilde{X}$ posee un número finito de vértices y aristas. En este escenario, la construcción del árbol maximal es un problema algorítmico trivial: basta con añadir aristas conexas paso a paso, evitando cerrar ciclos, hasta agotar los vértices. Este proceso termina en un número finito de pasos y se formaliza sin dificultades en la teoría de conjuntos estándar de Zermelo-Fraenkel.

El problema emerge cuando el subgrupo H tiene índice infinito. En tal caso, el espacio recubridor $\tilde{X}$ es un grafo infinito. La construcción *paso a paso* requeriría de infinitas elecciones arbitrarias consecutivas, algo que la axiomática Zermelo-Fraenkel, por sí sola, no permite realizar al carecer de una regla explícita para efectuar dichas selecciones de manera simultánea. Es precisamente aquí donde la demostración topológica del teorema hace uso implícito de una

de las herramientas más potentes y debatidas de las matemáticas contemporáneas: el Lema de Zorn.

A.1.1 Contexto Histórico

El axioma de elección fue formulado explícitamente por Ernst Zermelo en 1904 con un objetivo muy preciso: demostrar el Teorema del Buen Orden, el cual afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado. Intuitivamente, el axioma establece que, dada una familia de conjuntos no vacíos, es posible *elegir* un elemento de cada conjunto para formar un nuevo conjunto, incluso si la familia es infinita y no existe una regla constructiva evidente para realizar tal selección.

La introducción de este axioma desató una de las controversias más intensas en la historia de las matemáticas a principios del siglo XX. Escuelas de pensamiento constructivistas, lideradas por figuras como Émile Borel, René Baire y Henri Lebesgue, rechazaron la validez de un axioma que postulaba la existencia de objetos matemáticos sin proporcionar un método para construirlos. En el lado opuesto, matemáticos de corte formalista como David Hilbert y Jacques Hadamard argumentaban que el axioma era indispensable para el desarrollo natural del análisis y el álgebra moderna.

Con el tiempo, el uso del axioma de elección se estandarizó debido a su extrema utilidad; sin él, resultados fundamentales como el Teorema de Tychonoff (que garantiza la compacidad de productos arbitrarios de espacios compactos), la existencia de bases para cualquier espacio vectorial, o el propio Teorema de Nielsen-Schreier, se desmoronan. El debate fundacional quedó parcialmente cerrado tras dos hitos de la lógica matemática: en 1938, Kurt Gödel demostró que el axioma de elección es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel, y en 1963, Paul Cohen demostró que también es independiente, es decir, no puede ser refutado ni demostrado desde Zermelo-Fraenkel.

A.1.2 El Lema de Zorn

Aunque el axioma de elección permite realizar infinitas elecciones simultáneas, su uso directo en topología y álgebra a menudo resulta difícil. En 1935, Max Zorn publicó un principio maximal que simplificaba enormemente las demostraciones, conocido hoy como el Lema de Zorn. Este establece que si en un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) posee una cota superior en P , entonces el conjunto P contiene al menos un elemento maximal. Este lema es lógicamente equivalente al axioma de elección. En el contexto de nuestro trabajo, su aplicación es directa y necesaria:

Teorema A.1.1 (Existencia de árboles maximales). *Todo grafo conexo X admite un árbol maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los subgrafos de X que son acíclicos. Dotamos a $\mathcal{T}$ de un orden parcial dado por la relación de inclusión ($\subseteq$). El conjunto $\mathcal{T}$ no es vacío, ya que cualquier vértice individual de X es, trivialmente, acíclico.

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ una cadena, es decir, un subconjunto totalmente ordenado de grafos acíclicos. Definimos $T^* = \bigcup_{T \in \mathcal{C}} T$. Afirmamos que T^* es acíclico. Si existiera un ciclo topológico c en T^* , al tener el ciclo longitud finita (está formado por un número finito de aristas), todas sus aristas

tendrían que pertenecer a algún grafo $T_k \in \mathcal{C}$ de la cadena. Pero esto es una contradicción, ya que T_k es acíclico por definición.

Por lo tanto, $T^* \in \mathcal{T}$ y es, por construcción, una cota superior para la cadena $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn (equivalente al axioma de elección en Zermelo-Fraenkel), el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{T}$ posee un elemento maximal. Adicionalmente, este elemento maximal es conexo por ser unión de conexos con elementos en común, constituyendo así el árbol maximal buscado. $\square$

Esta proposición encapsula la dependencia axiomática de todo nuestro trabajo. Sin el Lema de Zorn (y por tanto, sin el axioma de elección), la existencia del árbol maximal que contraemos para obtener la rosa de no está garantizada para el caso infinito.

A.2 Formalización en Lean 4

La verificación formal de teoremas es una disciplina en auge que busca erradicar la ambigüedad del lenguaje natural en las matemáticas. Para consolidar la proposición anterior, hemos implementado su demostración en Lean 4, un asistente de demostración interactivo desarrollado en *Microsoft Research*. Lean 4 no solo actúa como un lenguaje de programación funcional, sino como un verificador implacable que comprueba paso a paso la corrección lógica de cada deducción matemática, apoyándose en la inmensa biblioteca comunitaria *Mathlib*.

A.2.1 Relación con la lógica constructiva y clásica

El fundamento de Lean es el Cálculo de Construcciones Inductivas (CiC), un sistema de tipos dependientes. En este marco lógico rige el isomorfismo de Curry-Howard, también conocido como el principio de proposiciones como tipos y demostraciones como términos. Demostrar un teorema en Lean consiste, esencialmente, en construir un programa (un término) que tenga el tipo correspondiente al enunciado de dicho teorema.

Un aspecto fascinante de Lean que entronca directamente con la discusión del axioma de elección es su naturaleza intrínsecamente constructivista. Por defecto, Lean exige que si afirmamos la existencia de un objeto, debemos ser capaces de proporcionar un algoritmo finito para construirlo. Dado que la existencia del árbol maximal para grafos infinitos depende de elecciones no constructivas, Lean requiere que declaremos explícitamente el uso de la lógica clásica. Esto ilustra a la perfección la diferencia conceptual entre la topología computable y la no computable.

A.2.2 Demostración inductiva y código

A continuación se presenta el código desarrollado en Lean 4 para intentar formalizar la existencia del árbol maximal. La demostración sigue una estructura análoga a la presentada en lenguaje natural, haciendo uso de los teoremas disponibles en *Mathlib* para ordenes parciales y el Lema de Zorn (`zorn_partial_order`).

Listing A.1: Formalización de la existencia del árbol con axiomas en la transferencia de propiedades entre la cadena y su cota superior.

```

1 import Mathlib.Combinatorics.SimpleGraph.Acyclic
2 import Mathlib.Combinatorics.SimpleGraph.Connectivity.Subgraph
3 import Mathlib.Combinatorics.SimpleGraph.Subgraph
4 import Mathlib.Order.Zorn
5
6 -- Definimos el Tipo sobre el que trabajamos
7 universe u
8 -- Definimos nuestro grafo simple G como variable dependiente del tipo V
9 variable {V : Type u} (G : SimpleGraph V)
10 -- Definimos nuestro conjunto  $\Sigma$  al que llamaremos Conj
11 def Conj : Set (G.Subgraph) :=
12   {H : G.Subgraph | H.coe.IsAcyclic}
13 -- Demostremos que el conjunto  $\Sigma$  es no vacío
14 lemma Sigma_Non_Empty :
15    $\exists H : G.Subgraph, H \in \text{Conj } G := \text{by}$ 
16   refine ⟨1, ?_⟩
17   simp [Conj]
18 -- Definimos una cadena ascendente en  $\Sigma$  con la relación de inclusión de
   subgrafos
19 def AscendingChain (C : Set (G.Subgraph)) : Prop :=
20   C  $\subseteq$  Conj G  $\wedge$  IsChain ( $\cdot \leq \cdot$ ) C
21 -- axioma 1: La cota superior (supremo) de una cadena ascendente de
   subgrafos acíclicos es acíclica.
22 axiom Upper_Bound_Is_Acyclic {V : Type u} (G : SimpleGraph V) (C : Set
   G.Subgraph) (hC : AscendingChain G C) :
23   (sSup C).coe.IsAcyclic
24 -- Probamos por tanto que existe la cota superior en el conjunto  $\Sigma$ 
25 theorem Exist_Upper_Bound (C : Set G.Subgraph) (hC : AscendingChain G
   C) :
26    $\exists H \in \text{Conj } G, \forall K \in C, K \leq H := \text{by}$ 
27   use sSup C
28   constructor
29   · exact Upper_Bound_Is_Acyclic G C hC
30   · intro K hK
31     exact le_sSup hK
32 -- Finalmente, aplicamos el lema de Zorn para construir un subgrafo
   maximal acíclico
33 lemma Existe_Maximal :  $\exists (M : G.Subgraph), \text{Maximal } (\text{fun } x \mapsto x \in \text{Conj } G)$ 
   M := by
34   apply  $\omega\text{zorn\_le}$  (Conj G)
35   intro c hc_sub hc_chain
36   have hC : AscendingChain G c := ⟨hc_sub,  $\rangle$ hc_chain
37   exact Exist_Upper_Bound G c hC
38 -- axioma 2: Si un grafo G es conexo, su subgrafo maximal acíclico M
   también es conexo.
39 axiom Maximal_Subgraph_is_Connected {V : Type u} (G : SimpleGraph V)
   (hG : G.Connected)
40   (M : G.Subgraph) (hM_acyc : M  $\in$  Conj G) (hM_max : Maximal ( $\text{fun } x \mapsto x$ 
    $\in$  Conj G) M) :
41   M.Connected
42 -- Queremos probar ahora que si G es conexo, entonces el subgrafo
   maximal es un árbol
43 theorem Maximal_is_Tree (hG : G.Connected) :
44    $\exists T : G.Subgraph, T \in \text{Conj } G \wedge T.\text{Connected} := \text{by}$ 
45   have h_max := Existe_Maximal G
46   rcases h_max with ⟨M, hM_in_Conj,  $\rangle$ hM_maximal

```

```

47 use M
48 constructor
49 · exact hM_in_Conj
50 · exact Maximal_Subgraph_is_Connected G hG M hM_in_Conj hM_maximal

```

Puede observarse en el Código A.1 que la formalización se apoya en la implementación de dos axiomas. A priori, esto dota a la demostración de un carácter formalmente incompleto en el sistema. A continuación, en el Código A.2, se muestran los intentos llevados a cabo para demostrar estas propiedades sin recurrir a axiomas. Es fundamental destacar que la dificultad para cerrar estas demostraciones no reside en un obstáculo conceptual. La intuición matemática es clara: si una unión ascendente de grafos acíclicos tuviera un ciclo, al ser este finito, debería estar contenido en algún elemento de la cadena, lo cual es una contradicción.

Sin embargo, el problema subyacente surge de la rigidez de la teoría de tipos en Lean 4. En el lenguaje matemático natural, la distinción entre un grafo y un subgrafo es puramente contextual; trabajamos con ellos de manera intercambiable. En contraste, el demostrador de teoremas exige un rigor tipológico absoluto: es necesario construir coerciones explícitas para mapear elementos de tipo `G.Subgraph` hacia el tipo `SimpleGraph V`. Probar que propiedades como la aciclicidad o la estructura dirigida (`DirectedOn`) se preservan invariantes a través de estas biyecciones y proyecciones de aristas (`Adj`) requiere un desarrollo técnico exhaustivo que se aleja del propósito principal del teorema.

Listing A.2: Intento de demostración de la transferencia de propiedad entre la cadena de subgrafos y la cota superior.

```

1
2 -- Veamos ahora que la cota superior es acíclica
3 lemma Upper_Bound_Is_Acyclic (C : Set G.Subgraph) (hC : AscendingChain
4   G C) :
5   (sSup C).coe.IsAcyclic := by
6     -- Convertimos cada subgrafo K en un grafo sobre todo V usando solo
7     -- sus adyacencias.
8     let Hs : Set (SimpleGraph V) :=
9       { H' | ∃ K ∈ C, H' = { Adj := K.Adj, symm := K.symm, loopless :=
10         K.loopless } }
11     -- Como C es una cadena por hC.right, al proyectar las aristas
12     -- el conjunto sigue siendo dirigido.
13     have h_dir : DirectedOn (· ≤ ·) Hs := by
14       sorry
15     -- (Como cada K ∈ C está en Conj G, K es acíclico. Añadir vértices
16     -- aislados no rompe esto).
17     have h_acyc : ∀ H' ∈ Hs, H'.IsAcyclic := by
18       sorry
19     have h_sSup_Hs_acyc : (sSup Hs).IsAcyclic :=
20       SimpleGraph.isAcyclic_sSup_of_isAcyclic_directedOn Hs h_acyc h_dir
21     -- El supremo de nuestra cadena de subgrafos (sSup C) tiene
22     -- exactamente
23     -- la misma estructura de ciclos que el supremo de los grafos simples
24     -- (sSup Hs).
25     -- Por tanto, hereda la aciclicidad.
26     sorry
27 -- Probamos por tanto que existe la cota superior en el conjunto Σ
28 theorem Exist_Upper_Bound (C : Set G.Subgraph) (hC : AscendingChain G
29   C) :

```

```

23  ∃ H ∈ Conj G, ∀ K ∈ C, K ≤ H := by
24  use sSup C
25  constructor
26  · exact Upper_Bound_Is_Acyclic G C hC
27  · intro K hK
28    exact le_sSup hK
29  -- Finalmente, ya hemos obtenido la cota superior y por tanto podemos
    aplicar el lema de Zorn para
30  -- construir un subgrafo maximal acíclico
31  lemma Existe_Maximal : ∃ (M : G.Subgraph), Maximal (fun x ↦ x ∈ Conj G)
    M := by
32  apply ozorn_le (Conj G)
33  -- Demostramos que para una cadena ascendente tenemos cota superior
34  -- que tiene una cota superior dentro de Conj G.
35  intro c hc_sub hc_chain
36  -- Es cadena
37  have hC : AscendingChain G c := ⟨hc_sub, ⟩hc_chain
38  -- Invocamos el teorema que tanto nos ha costado demostrar
39  exact Exist_Upper_Bound G c hC
40  -- Queremos probar ahora que si G es conexo, entonces el subgrafo
    maximal es un árbol
41  theorem Maximal_is_Tree (hG : G.Connected) :
42  -- Como no tenemos librería para exigir que T sea acíclico como
    subgrafo,
43  -- lo incluimos en Σ que por definición lo exige.
44  ∃ T : G.Subgraph, T ∈ Conj G ∧ T.Connected := by
45  -- Obtenemos el maximal por el lema anterior
46  have h_max := Existe_Maximal G
47  rcases h_max with ⟨M, hM_in_Conj, ⟩hM_maximal
48  -- Nuestro candidato a árbol es M
49  use M
50  have hM_acyc : M ∈ Conj G := hM_in_Conj
51  constructor
52  · exact hM_acyc
53  · -- Razonamos por contradicción para ver que es conexo
    by_contra hM_not_conn
54  sorry
55

```

Así pues, queda justificado el uso de los axiomas. El intento de cerrar la implementación de manera completa excedía del tiempo y el alcance de este trabajo. La formalización estricta de estos dos lemas requiere asentar un puente lógico entre la teoría de órdenes parciales y la topología de grafos que, si bien es trivial en el discurso matemático tradicional gracias a la flexibilidad semántica del lenguaje natural, en Lean 4 exige un tratamiento minucioso de la jerarquía de tipos y la manipulación de subestructuras.

Se ha puesto así de manifiesto la asimetría entre la lógica clásica y la teoría de tipos dependientes (Cálculo de Construcciones Inductivas). La necesidad de axiomatizar etapas intermedias para transitar entre las jerarquías de `G.Subgraph` y `SimpleGraph V` confirma que, si bien el lenguaje matemático natural posee una enorme ductilidad semántica para intercambiar contextos, la traducción de invariantes topológicos a una sintaxis estrictamente tipada exige un andamiaje técnico exhaustivo. Esto no implica explícitamente que haya que decidirse por una de las dos formalizaciones. El magnífico matemático Terence Tao es uno de los grandes contribuidores del proyecto Lean 4 y su afán de computar las matemáticas está motivado por la enorme fortaleza que esto aporta al saber matemático, más aun hoy en día con la incursión de

la Inteligencia Artificial Generativa.

Demostraciones auxiliares

Proposición B.0.1. *Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$, definimos el conjunto $U := \{x \in X : \exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = x, \sigma(1) = x_0\}$.

Observamos que $U \neq \emptyset$, porque $x_0 \in U$ (mediante el camino constante).

Veamos que U es abierto. Sea $x \in U$. Como X es localmente conexo por caminos, existe un entorno $V \subseteq X$ de x que es abierto y conexo por caminos. Para cualquier $y \in V$, existe un camino γ en V que conecta y con x . Como $x \in U$, existe también un camino σ en X que conecta x con x_0 . Concatenando ambos caminos $(\gamma * \sigma)$, obtenemos un camino continuo desde y hasta x_0 , lo que implica que $y \in U$. Por lo tanto, $V \subseteq U$, lo que demuestra que U es abierto.

Veamos ahora que el complementario $X \setminus U$ también es abierto (y por ende, U es cerrado). Sea $z \in X \setminus U$. De nuevo, por la conexidad local por caminos de X , existe un entorno $W \subseteq X$ de z , abierto y conexo por caminos. Si existiese algún $y \in W \cap U$, podríamos tomar un camino en W de z a y y concatenarlo con el camino en X de y a x_0 (cuya existencia está garantizada al ser $y \in U$). Esta concatenación sería un camino de z a x_0 , lo que implicaría $z \in U$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, $W \subseteq X \setminus U$, lo que prueba que $X \setminus U$ es abierto.

Dado que U es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío del espacio topológico conexo X , se concluye que $U = X$.

En consecuencia, todo punto del espacio se puede conectar con x_0 mediante un camino continuo. Dados dos puntos arbitrarios $a, b \in X$, ambos se pueden conectar con x_0 . Concatenando el camino de a a x_0 con el camino inverso de x_0 a b , obtenemos un camino que conecta a con b . Por lo tanto, X es conexo por caminos. $\square$

Lema B.0.2 (Criterio de levantamiento). *Sea $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicación de recubrimiento y sea Y un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Una aplicación continua $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ admite un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ si y solo si se cumple la contención algebraica:*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad (\text{B.1})$$

Demostración. Demostremos ambas implicaciones:

$\Rightarrow$: Tenemos que si existe $\tilde{f}$ entonces los diagramas son conmutativos y por tanto $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$

$\Leftarrow$: Vamos a construir el levantamiento $\tilde{f} : Y \rightarrow E$. Sea $y \in Y$. Como Y es conexo por caminos, existe un camino $\gamma : I \rightarrow Y$ tal que $\gamma(0) = y_0$ y $\gamma(1) = y$. La composición $f \circ \gamma$ es un camino en X con punto inicial x_0 . Por el teorema de levantamiento de caminos, existe un único camino $\widetilde{f \circ \gamma}$ en E que levanta a $f \circ \gamma$ comenzando en $\widetilde{f \circ \gamma}(0) = e_0$. Definimos $\tilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \gamma}(1)$.

Veamos que $\tilde{f}$ está bien definida, es decir, es independiente de la elección de γ . Sea γ' otro camino en Y de y_0 a y . El camino concatenado $\alpha = \gamma * \overline{\gamma'}$ es un lazo en Y basado en y_0 . Al aplicar f , obtenemos el lazo $f \circ \alpha = (f \circ \gamma) * (f \circ \overline{\gamma'})$ en X basado en x_0 . Por hipótesis, la clase de homotopía $[f \circ \alpha] = f_*([\alpha])$ pertenece a $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$. Dado que la clase de $f \circ \alpha$ pertenece a la imagen de p_* , su único levantamiento a E con origen en e_0 debe ser un lazo (sus puntos inicial y final coinciden). Este levantamiento es exactamente $\widetilde{f \circ \gamma} * \widetilde{f \circ \overline{\gamma'}}$, lo que implica que $\widetilde{f \circ \gamma}(1) = \widetilde{f \circ \gamma'}(1)$. Así, $\tilde{f}$ está bien definida.

Es inmediato que $p \circ \tilde{f} = f$ y que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ (tomando el camino constante en y_0).

Resta demostrar que $\tilde{f}$ es continua. Dado $y \in Y$, sea $U \subseteq X$ un entorno de $f(y)$ uniformemente recubierto por p . Existe una hoja $\tilde{U} \subseteq E$ tal que $\tilde{f}(y) \in \tilde{U}$ y $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Como Y es localmente conexo por caminos y f es continua, existe un entorno $V \subseteq Y$ de y , abierto y conexo por caminos, tal que $f(V) \subseteq U$. Para cualquier $y' \in V$, podemos formar un camino desde y_0 hasta y' concatenando γ con un camino η en V desde y hasta y' . El levantamiento de $f \circ \eta$ que empieza en $\tilde{f}(y)$ viene dado por $(p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ \eta)$, ya que su imagen está contenida en U . Por unicidad del levantamiento, concluimos que para todo $y' \in V$, $\tilde{f}(y') = (p|_{\tilde{U}})^{-1}(f(y'))$. Al ser composición de funciones continuas en el abierto V , $\tilde{f}$ es continua. □

Lema B.0.3 (Unicidad de levantamiento). *Sean X un espacio topológico, $p : E \rightarrow X$ una aplicación de recubrimiento y $f : Y \rightarrow X$ una aplicación continua con Y conexo. Si tomamos $x_0 \in X, y_0 \in Y, e_0 \in E$ tales que $f(y_0) = x_0 = p(e_0)$. Si Y es conexo, entonces $\tilde{f}$ es única.*

Demostración. Consideremos dos levantamientos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ verificando las condiciones del enunciado. Definimos los conjuntos:

$$A := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\} \quad (\text{B.2})$$

$$B := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)\} \quad (\text{B.3})$$

Observamos que $y_0 \in A$ por hipótesis, por lo que es no trivial. Probemos ahora que A y B son abiertos. En tal caso, como Y es conexo entonces necesariamente $Y = A$, es decir, que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Sea $y_1 \in A$ y $x_1 = f(y_1)$, como p es aplicación de recubrimiento entonces $\exists U \subseteq X$ abierto trivializante de U (Definición 3.2.2). Dado que por hipótesis, $y \in A$, entonces $\tilde{f}_1(y_1) = \tilde{f}_2(y_1) \Rightarrow p(\tilde{f}_1(y_1)) = p(\tilde{f}_2(y_1)) = x_1$. De este modo, $\exists j \in J$ tal que $\tilde{f}_1(y_1) = \tilde{f}_2(y_1) \in V_j$. Considerando entonces $V = \tilde{f}_1^{-1}(V_j) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_j)$ es un abierto en Y con $y_1 \in V$. Falta ver que $V \subseteq A$ y habremos concluido que A es abierto.

Sea $z \in V$, veamos que $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$. Como $\tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_2$ son levantamientos de f , satisfacen por definición que $p \circ \tilde{f}_1 = f$ y $p \circ \tilde{f}_2 = f$. Evaluando en z , obtenemos de manera directa que

$p(\tilde{f}_1(z)) = p(\tilde{f}_2(z))$, y como $p|_{V_j}$ es un homeomorfismo, entonces por inyectividad necesariamente $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$.

Por otro lado, veamos que B también es abierto. De manera análoga, dado que $p(\tilde{f}_1(y_1)) = p(\tilde{f}_2(y_1)) = x_1$, entonces existen i, k tales que $\tilde{f}_1(y_1) \in V_i, \tilde{f}_2(y_1) \in V_k$. Considerando ahora, de nuevo, $V = \tilde{f}_1^{-1}(V_i) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_k)$, tenemos que $y_1 \in V$. Para ver ahora que $V \subseteq B$, tomamos $z \in B$. Entonces, $\tilde{f}_1(z) \in V_i, \tilde{f}_2(z) \in V_k$ y como la restricción es un homeomorfismo, necesariamente tenemos que $V_i \cap V_k = \emptyset$, por lo que $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \Rightarrow V \subseteq B$, concluyendo el resultado. $\square$