



**Facultad
de
Ciencias**

Caminos óptimos en medios aleatorios correlacionados

Optimal paths in random correlated media

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN FÍSICA**

**Autor: Alberto Campuzano Solórzano
Director: Dr. Juan Manuel López Martín
Co-Director: Dr. Enrique Rodríguez Fernández**

Junio - 2026

Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco.

Resumen

El concepto de clase de universalidad constituye uno de los pilares fundamentales de la física estadística. La idea principal reside en la capacidad de abstraerse de las características microscópicas de un sistema para atender únicamente a su comportamiento macroscópico. El estudio de la clase de universalidad Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) ha sido de especial interés, tanto teórico como computacional, por sus grandes implicaciones en numerosos sistemas físicos e interdisciplinarios. En este trabajo se aborda de manera novedosa el estudio de esta clase de universalidad mediante el modelo de Polímeros Dirigidos en Medios Aleatorios (DPRM) con correlación temporal. Mediante la implementación de un algoritmo de Matriz de Transferencia, se evalúa el impacto de la memoria temporal en los caminos óptimos y la clase de universalidad que describe la ecuación KPZ. En el régimen descorrelacionado, las simulaciones reproducen fielmente los exponentes críticos clásicos ($\zeta = 2/3$, $\omega = 1/3$) y corroboran el escalado previsto por la teoría estándar. Sin embargo, la introducción de ruido correlacionado en el tiempo del tipo $1/f^\beta$ afecta a la clase de universalidad. Los resultados describen cualitativamente el comportamiento esperado pero difieren de los límites teóricos esperados, reforzando la idea de fragilidad frente a este tipo de correlaciones. Adicionalmente, se observa la ruptura de una de las relaciones fundamentales del caso canónico (descorrelacionado): la Invarianza Galileana.

Palabras clave: Universalidad, Polímeros Dirigidos, Ecuación KPZ, Ruido Correlacionado, Exponentes críticos.

Abstract

The concept of universality class constitutes one of the fundamental pillars of statistical physics. The main idea is the ability to abstract away from the microscopic details of a system to focus solely on its macroscopic behavior. The study of the Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) universality class has been of particular interest, both theoretically and computationally, due to its widespread implications in numerous physical and interdisciplinary systems. This work addresses the study of this universality class in a novel way through the Directed Polymers in Random Media (DPRM) model with temporal correlation. By implementing a Transfer Matrix algorithm, the impact of temporal memory on the optimal paths and the universality class described by the KPZ equation is evaluated. In the uncorrelated regime, the simulations faithfully reproduce the classical critical exponents ($\zeta = 2/3$, $\omega = 1/3$) and corroborate the scaling predicted by standard theory. However, the introduction of time-correlated noise of the $1/f^\beta$ type alters the universality class. The results qualitatively describe the expected behavior but deviate from the anticipated theoretical limits, reinforcing the notion of fragility in the presence of such correlations. Additionally, the breaking of one of the fundamental symmetries of the canonical (uncorrelated) case is observed: Galilean Invariance.

Keywords: Universality, Directed Polymers, KPZ Equation, Correlated Noise, Critical exponents.

Agradecimientos

Estos últimos cinco años han sido tiempo de cambios y decisiones. La transición a la vida adulta nunca es sencilla y el nivel de exigencia que requiere la Universidad endurece notablemente este camino. Entré en la facultad siendo un niño, con un plan de futuro que ha cambiado tantas veces y que, sin duda, aún está por definirse. Sin embargo, en este trayecto tan bonito como duro, he tenido la suerte de contar con personas que han dispuesto todo lo que estaba en su mano para que pueda alcanzar mis sueños.

En primer lugar, y como no podría ser de otra forma, quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, su apoyo incondicional en los buenos y no tan buenos momentos. Me han acompañado como quien enseña a un niño a montar en bicicleta: dejándome avanzar por mí mismo, pero siempre preparados para sostenerme si caía. Les estaré eternamente agradecido por haberme enseñado a mirar el mundo desde sus raíces más profundas, porque es así como uno construye su carácter y aprende a pensar. Tampoco puedo olvidar a la que se ha convertido en mi segunda familia, los Postigo-Díaz. Mi pareja, Natalia, sus padres Leandro y Alicia, su hermano Dani y con especial cariño a mis pequeños, Bimba y Linux. Gracias de corazón por abrirme las puertas de vuestro hogar y convertirlos en una parte esencial de mi vida.

En lo que a esta ronda de reconocimientos se refiere, no puedo dejar fuera a mis amigos. Especialmente, a Clara, David y Silvia, por acompañarme en mis momentos de lucidez y también en mis incontables descensos a la locura. Gracias por quererme incluso cuando no me entendíais del todo y por no haberme matado, a pesar de las innumerables ocasiones en que ese pensamiento seguramente se haya repetido.

A mis directores, Juanma y Enrique, gracias por haber hecho posible este proyecto. Buscaba un tema que me acercara a la investigación para conocer de primera mano este mundo y no solo me habéis guiado: habéis despertado en mí la curiosidad y el deseo de seguir aprendiendo. Siempre se tiene el recuerdo de los malos profesores, de los que te arruinan una asignatura, pero vosotros pertenecéis a esa minoría que hace que los alumnos se interesen por la Ciencia. Como decía mi tocayo alemán Albert Einstein¹, *"Lo más incomprensible del universo es que es comprensible"*. Que podamos describir el Universo, desde lo elemental a lo más colosal, con unas pocas leyes construidas sobre los andamios de las matemáticas es el milagro y triunfo más grande del *Homo sapiens sapiens*. No somos meros espectadores, somos partícipes del juego, capaces de entender las reglas que nos rigen, como si el alfil en el ajedrez fuera consciente de que solo puede moverse en diagonal y comprendiera por qué. Cada vez que descubrimos una nueva ley o un nuevo principio, no es solo una victoria del intelecto, sino un momento de profunda conexión con la realidad. Este asombro es el que da sentido a dedicarse a la Ciencia y lo que ha hecho que este sea el rumbo al que quiero dirigir mi vida.

Finalmente, quiero hacerte una especial mención a ti, Deva, porque estés donde estés sé que has seguido viniendo a despedirte de mí cada vez que subía al coche para ir a la universidad y que lo seguirás haciendo en esta nueva etapa de mi vida. Tu ausencia es irreparable, pero el bonito recuerdo que dejaste en mí perdurará. Porque te llevo grabada en mi piel y en mi corazón. Como rezan las sabias expresiones latinas: *Ubi tu, ibi ego* (Donde tú estés, allí estaré yo).

¹Nótese que esto se dice con la incommensurable distancia que hay entre Él y yo aun siquiera por la relación de equivalencia de tener el mismo nombre.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Acrónimos	1
1 Introducción	3
1.1 Universalidad y crecimiento de interfases	3
1.1.1 La ecuación KPZ	4
1.2 Motivación y objetivos	5
2 Marco teórico	7
2.1 Kinetic roughening y anomalous scaling	7
2.1.1 Escalado: Relación de Family–Vicsek	8
2.2 Factor de estructura y escalado anómalo	9
2.3 La ecuación Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)	9
2.4 Polímeros dirigidos en medios descorrelacionados	11
2.4.1 Definición	12
2.4.2 Transformación de Cole-Hopf	12
2.4.3 Conexión con la ecuación KPZ	12
2.4.4 Métodos de resolución	13
2.4.5 Modelos Discretos	14
2.5 Medios correlacionados	14
3 Metodología	17
3.1 Método de la matriz de transferencia	17
3.2 Generación del Ruido Correlacionado	17
3.2.1 Transformada continua de Fourier	18
3.2.2 Transformada Discreta de Fourier (DFT)	19
3.2.3 Algoritmo de Generación de ruido	19
3.3 Comprobación del algoritmo	20
3.4 Geometría de la red	21
3.4.1 Red rectangular	21

4 Validación: DPRM sin correlación	25
4.1 Exponentes Universales	25
4.2 Implementación	26
4.2.1 Control de densidad	26
4.2.2 Algoritmo de crecimiento	27
4.2.3 Introducción del ruido	27
4.3 Visualización de los caminos óptimos	27
4.4 Resultados	28
4.4.1 Exponente de <i>wandering</i> (ζ)	29
4.4.2 Fluctuaciones de energía (ω)	29
4.4.3 Exponente roughening (α)	30
4.5 Eficiencia del modelo	30
5 DPRM con correlación	31
5.1 Implementación	31
5.1.1 Algoritmo de crecimiento	31
5.1.2 Introducción del ruido correlacionado	32
5.2 Evolución de los exponentes críticos	33
5.2.1 Exponente <i>wandering</i> y fluctuaciones de energía	33
5.2.2 Ruptura de la Invarianza Galileana	34
6 Conclusiones	37
6.1 Discusión de los resultados	37
6.2 Trabajo a futuro	37
7 Reflexión final	39
Bibliografía	41
A Geometría de la red	v
A.1 Red cuadrada rotada 45°	v
B Demostraciones	vii
B.1 Invarianza Galileana	vii
B.2 Transformada de Cole-Hopf	viii
B.3 Transformada de Fourier	ix

Índice de figuras

2.1	Crecimiento de interfases en modelos BD y RSOS.	8
2.2	Modelo de Eden y crecimiento biológico.	10
2.3	Esquema del crecimiento no lineal de una superficie.	10
2.4	Esquema conceptual de un polímero dirigido	11
3.1	Espectro de ruidos estocásticos $1/f^\beta$	18
3.2	Validación espectral del generador de ruido.	20
3.3	Geometría de la red rectangular.	22
3.4	Implementación <i>on-bond</i> del ruido correlacionado (red rectangular).	23
4.1	Reconstrucción de caminos óptimos bajo ruido blanco.	28
4.2	Escalado del exponente de <i>wandering</i> (ζ).	29
4.3	Escalado del exponente de las fluctuaciones de energía (ω).	29
5.1	Implementación <i>on-bond</i> del ruido correlacionado (red cuadrada rotada).	32
5.2	Evolución de los exponentes ζ y ω con la correlación temporal.	33
5.3	Transición de los exponentes z y α	34
5.4	Ruptura de la Invarianza Galileana	35
A.1	Geometría de la red cuadrada rotada.	v
A.2	Implementación <i>on-bond</i> del ruido correlacionado (red cuadrada rotada).	vi

Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco.

Acrónimos

- BD** Deposition balística (*ballistic deposition*). 5, 7, 8, 11
- DFT** *Discrete Fourier Transform* (Transformada Discreta de Fourier). 19
- DP** Polímero Dirigido (*Directed Polymer*). 12, 17
- DPRM** Polímeros Dirigidos en Medios Aleatorios (*Directed Polymers in Random Media*). 5, 7, 8, 11–15, 17, 21, 25–27, 30, 31, 37, 38
- FFT** *Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier). 19, 31
- IDFT** *Inverse Discrete Fourier Transform* (Transformada Discreta de Fourier Inversa). 19
- IFFT** *Inverse Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier Inversa). 19
- KPZ** Kardar-Parisi-Zhang. viii, 4, 5, 7–15, 17, 25, 26, 28, 30, 34, 35, 37, 38
- PSD** *Power Spectral Density* (Densidad Espectral de Potencia). 9, 20, 38
- RAM** Random Access Memory. 23, 30, 31
- RG** *Renormalization Group* (Grupo de Renormalización). 15
- RSOS** Sólido sobre Sólido Restringido (*Restricted Solid-On-Solid*). 7, 8
- SOC** *Self Organized Criticality* (Criticalidad autorganizada). 7
- TFG** Trabajo de Fin de Grado. 5, 11, 15, 32

Otras observaciones

En cuanto a la notación se refiere, vamos a aclarar la nomenclatura que se ha elegido con el fin de no incurrir malentendidos o llevar a confusión:

- De manera general se hablará de *polímeros dirigidos*, *polímeros dirigidos en medios aleatorios* o *polímeros* refiriéndose siempre al modelo de *entidad que crece en un paisaje energético aleatorio*, con o sin correlación.

- En la literatura, es habitual referirse a la longitud del polímero o tiempo de manera indistinta. Se entiende como tal la coordenada transversal o libre sobre la que imponemos la correlación. Bien podemos imaginar el polímero como una cadena que se alarga y crece en un cierto número de pasos o bien como una cuerda de cierta longitud fija que deformamos para marcar el camino que desarrolla. Ambas nomenclaturas son encontradas y se suelen utilizar a conveniencia para no interferir con otros símbolos. En nuestro caso, se ha utilizado la de *longitud* L del polímero, intentando ser consistente con esta elección en todo momento.
- Los exponentes críticos asociados a la clase de universalidad pueden tomar distintos nombres y símbolos, aunque generalmente la notación es coherente. De todos modos, para prevenir, consideraremos ζ el *exponente de wandering*, $\beta = \omega$ los *exponentes de energía* y α el *exponente de roughening*. Adicionalmente, llamaremos z a $z = \frac{1}{\zeta}$ también conocido como *exponente dinámico*.
- Cuando se mencione la técnica analítica del *Grupo de Renormalización*, nos referiremos en todo momento a su extensión *Grupo de Renormalización Dinámico* que abarca los procesos fuera del equilibrio, que son nuestro objeto de estudio.
- El ruido implementado es ampliamente conocido como ruido $1/f^\beta$, sin embargo, uno de los exponentes de la ecuación KPZ recibe también la simbología de β . Por ello, para no incurrir en confusiones el ruido se designará como $2\theta = \beta$ de manera que cuando el contexto sea claro sí se utilizará el término habitual $1/f^\beta$ y en el análisis usaremos θ para no generar confusión.
- La notación $\mathbf{x}$ hace referencia a un vector en el espacio de dimensión d , mientras que x se refiere a la coordenada transversal del polímero.
- Los códigos relativos a la implementación del problema pueden visitarse en el repositorio de *GitHub* destinado a almacenarlos con el fin de que sea accesible a cualquier persona, bajo la licencia MIT [1].
- Todas las ilustraciones que no son imágenes debidamente citadas han sido realizadas mediante el software libre *ipe* [2], disponible en la distribución *Kubuntu* de *Linux*.

CAPÍTULO 1

Introducción

“Hay otra clase de belleza en la ciencia, una más profunda y sutil, que reside en la comprensión de cómo funciona el mundo. Es la belleza de ver un patrón donde otros solo ven ruido, de encontrar una ley simple que gobierna un millón de eventos aparentemente aleatorios. Es la sensación de ver caer un velo y contemplar, aunque sea por un instante, el mecanismo oculto del universo.”

Steven Weinberg.

La mecánica estadística proporciona un marco conceptual extraordinario para describir sistemas formados por un gran número de grados de libertad. En este contexto, uno de los conceptos más profundos es el de *universalidad*: sistemas microscópicamente distintos pueden compartir la misma fenomenología macroscópica cuando se consideran escalas suficientemente grandes. Esta idea adquiere especial relevancia en sistemas fuera del equilibrio, donde la dinámica colectiva puede dar lugar a leyes de escala, ajenas a la mayor parte de los detalles microscópicos del sistema.

El lenguaje natural para describir este tipo de comportamientos son las *power laws* o *leyes de potencias*. Cuando una magnitud física no presenta una longitud de escala característica intrínseca, su dependencia con el tamaño del sistema puede adoptar la forma

$$\mathcal{O}(L) \sim L^\gamma, \quad (1.1)$$

donde γ es un exponente crítico que rige el comportamiento asintótico del sistema. En este régimen, magnitudes aparentemente diferentes pueden colapsar en una misma clase de universalidad si comparten los mismos exponentes y las mismas propiedades de escala.

1.1 Universalidad y crecimiento de interfases

Un ejemplo paradigmático de esta idea aparece en el crecimiento de interfases. Fenómenos tan diversos como la deposición de materiales, el avance de frentes biológicos, la propagación de incendios o la evolución de ciertos paisajes energéticos exhiben estructuras comunes cuando se observan a gran escala [3], [4]. En todos estos casos, la pregunta física central se enfoca sobre qué propiedades macroscópicas permanecen invariantes bajo estos cambios de escala y se conservan entre los distintos sistemas que representan, despreciando los detalles particulares que los diferencian.

En el caso de las superficies, una magnitud fundamental es la rugosidad o anchura de la interfase, que mide la dispersión de la altura respecto a su valor medio. Su evolución temporal suele describirse mediante una *power law* cuyo comportamiento de escala es del tipo *Family-Vicsek* [5]. Se encuentra así que la rugosidad crece como una ley de potencias con el tiempo.

$$W(t) \sim t^\beta, \quad t < t_{\text{sat}}, \quad (1.2)$$

En el caso de sistemas finitos, encontramos que $W_{\text{sat}} = W(t \gg t_{\text{sat}})$ crece con el tamaño del sistema también como una ley de potencia

$$W_{\text{sat}} \sim L^\alpha. \quad (1.3)$$

Finalmente, un tercer exponente z , relaciona el tiempo de saturación con el tamaño del sistema

$$t_{\text{sat}} \sim L^z, \quad (1.4)$$

De este modo, podemos razonar que

$$W_{\text{sat}} \sim L^\alpha, \quad W_{\text{sat}} \sim t_{\text{sat}}^\beta \sim (L^z)^\beta \quad (1.5)$$

de donde se obtiene la relación $\alpha = \beta z$. A estos exponentes se les denomina generalmente como:

- **Exponente de roughening (α):** Caracteriza cómo escala la saturación espacial de las fluctuaciones de la interfaz con el tamaño del sistema ($W_{\text{sat}} \sim L^\alpha$).
- **Exponente de crecimiento (β):** Describe el aumento inicial de la rugosidad en el tiempo antes de alcanzar la saturación ($W \sim t^\beta$).
- **Exponente dinámico (z):** Relaciona la escala de relajación temporal con la escala espacial ($t_{\text{sat}} \sim L^z$).

1.1.1 La ecuación KPZ

En 1986, Kardar, Parisi y Zhang propusieron una ecuación estocástica no lineal para describir la evolución de la altura $h(x, t)$ de una interfase sometida a ruido y relajación difusiva [6]:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h(x, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h(x, t))^2 + \eta(x, t). \quad (1.6)$$

Aquí, ν cuantifica la relajación superficial, λ mide la intensidad del crecimiento lateral y $\eta(x, t)$ representa el ruido estocástico. En el caso canónico, el ruido es blanco y gaussiano,

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (1.7)$$

La importancia de la ecuación [Kardar-Parisi-Zhang \(KPZ\)](#) no reside solo en su forma diferencial, sino en que define una clase de universalidad completa. En $1 + 1$ dimensiones, esta presenta los valores analíticos

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{3}{2}, \quad (1.8)$$

que aparecen en multitud de modelos discretos y continuos de crecimiento. Además, la ecuación KPZ está ligada a una relación de simetría fundamental,

$$\alpha + z = 2, \quad (1.9)$$

conocida como *Invarianza Galileana*. Su origen está profundamente arraigado en la clase de universalidad KPZ y, como se verá en el Capítulo 5, su validez depende críticamente de la correlación del ruido.

1.2 Motivación y objetivos

El caso canónico de KPZ se estudia bajo la hipótesis de ruido blanco y gaussiano. Sin embargo, en muchos sistemas físicos reales el entorno presenta memoria temporal, lo que introduce correlaciones de largo alcance en el ruido. Esta modificación no es un simple detalle técnico, sino un cambio estructural que altera las leyes de escala y, potencialmente, la propia clase de universalidad.

Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) estudia el problema de caminos óptimos en un medio con desorden correlacionado, lo cual se enmarca en el modelo de *Polímeros Dirigidos en Medios Aleatorios* (*Directed Polymers in Random Media*) (DPRM). Aunque el caso con desorden no correlacionado ha sido ampliamente estudiado, su extensión al caso con correlaciones temporales constituye una vía apenas explorada en la literatura, especialmente en lo que respecta a su impacto sobre los exponentes de escala y la estructura de universalidad asociada.

Esta situación resulta interesante desde un doble punto de vista. Por un lado, permite estudiar de forma numérica y eficiente un sistema de la clase de universalidad KPZ a través de un problema de optimización global. Por el otro, facilita la introducción de ruido temporalmente correlacionado y el análisis de sus consecuencias sobre la clase de universalidad KPZ. La motivación de este enfoque está suscitada por trabajos recientes que estudian la consistencia de los exponentes críticos, y la clase en general, frente a modificaciones del ruido. En [7] se observó cómo el esquema de integración o el modelo de *Deposición balística* (*ballistic deposition*) (BD) pueden inducir desviaciones no despreciables en el comportamiento de los exponentes críticos respecto a la clase de universalidad KPZ. Adicionalmente, en [8] se reportó la aparición de comportamientos fractales en el perfil de energías del polímero al aumentar la intensidad del ruido, lo cual sugiere la posible emergencia de nuevas propiedades de escala, en línea con escenarios discutidos en [9], cuya caracterización constituye una de las líneas futuras discutidas en el Capítulo 6.

Así pues, podemos resumir la estructura y los objetivos de este TFG del siguiente modo:

1. Implementar numéricamente el DPRM clásico con ruido descorrelacionado para recuperar los exponentes universales conocidos y validar el código.
2. Construir un generador de ruido con correlaciones temporales de tipo $1/f^\beta$, controlando el grado de memoria mediante el parámetro de correlación β y definir una geometría que permita introducir este ruido de manera eficiente y escalable.
3. Estudiar cómo varían los exponentes críticos del sistema al introducir correlación temporal.
4. Analizar la violación de la Invarianza Galileana con la correlación del ruido.

Marco teórico

Este capítulo recoge los conceptos fundamentales necesarios para estudiar el problema tratado en este trabajo. En primer lugar, se introducen las nociones de *Kinetic Roughening* y *Anomalous Scaling*, que constituyen la base de los sistemas fuera del equilibrio que queremos estudiar. A continuación, se presenta la ecuación de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) como modelo canónico de crecimiento estocástico y se discuten sus exponentes críticos y relaciones de escala más importantes. Finalmente, se aborda el modelo de polímeros dirigidos en medios aleatorios (DPRM), que constituye una reformulación de KPZ dada por la *Transformación de Cole-Hopf* y cuya conexión con la clase de universalidad KPZ permite reinterpretar el problema de crecimiento como uno de optimización en un paisaje desordenado.

2.1 Kinetic roughening y anomalous scaling

La morfología de las interfases en la dinámica de superficies presenta características muy diversas dependiendo de las simetrías y leyes de conservación del sistema. Una distinción fundamental se establece entre los sistemas que evolucionan hacia patrones ordenados y aquellos que exhiben un alto desorden espacio-temporal, perdiendo la dependencia de las escalas microscópicas. Este fenómeno de *invarianza de escala* tiene su origen conceptual en la física estadística de los fenómenos críticos. A diferencia de las transiciones de fase en equilibrio, donde es necesario ajustar un parámetro de control (como la temperatura en el modelo de Ising) para alcanzar el punto crítico, muchos modelos de crecimiento de superficies caen bajo el fenómeno de la *Self Organized Criticality* (Criticalidad autorganizada) (SOC). En este tipo de sistemas, la propia dinámica del no equilibrio empuja al sistema hacia un estado crítico estacionario carente de escalas características espaciales o temporales.

La forma de crecimiento superficial que se da en estos sistemas invariantes de escala se denomina *kinetic roughening*. Históricamente, el estudio de la universalidad en este fenómeno comenzó con implementaciones computacionales discretas de crecimiento de clústeres. Modelos simples como la *deposición balística* (BD, Figura 2.1a) o los *Sólido sobre Sólido Restrungido* (*Restricted Solid-On-Solid*) (RSOS) (Figura 2.1b) permitieron observar que, a gran escala, las simetrías macroscópicas dominan sobre los detalles microscópicos del sistema.

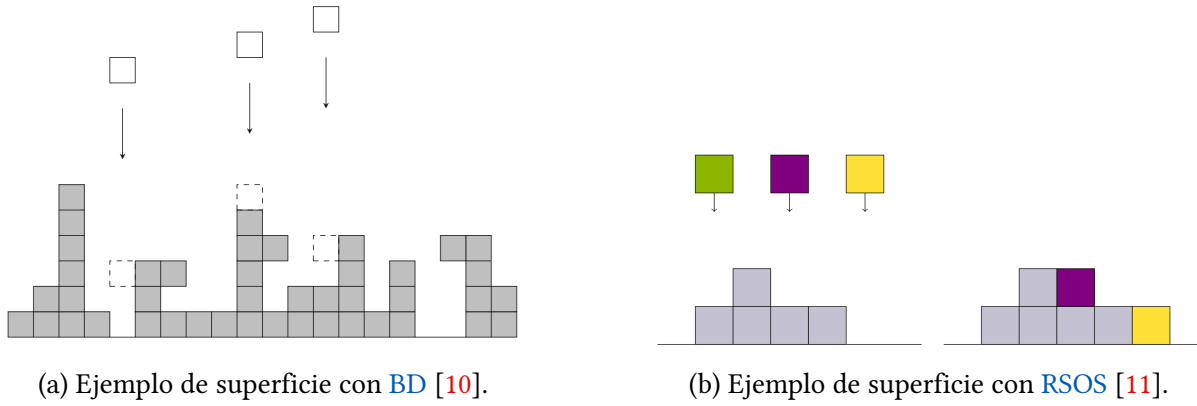


Figura 2.1: Ejemplos del crecimiento de superficies en el modelo de DP y RSOS. A grandes rasgos, ambos modelos son similares. En RSOS se limita el crecimiento a condiciones de contorno de la posición, de manera que por ejemplo $\Delta h \leq 1$.

La ventaja que presenta estos procesos, al igual que veremos en adelante con los DPRM, es que su implementación es sencilla y abstraen la configuración microscópica. Los estudios numéricos revelaron que estos sistemas exhiben un comportamiento universal respecto a la evolución de sus observables estadísticos, permitiendo clasificar modelos microscópicamente dispares dentro de distintas clases de universalidad, como la asociada a KPZ, que fundamenta este trabajo.

2.1.1 Escalado: Relación de Family–Vicsek

Tal y como se ha mencionado en el Capítulo 1, desde el punto de vista computacional, el estudio de la rugosidad de la interfase $W(L, t)$ es la piedra angular de este tipo de modelos, y viene gobernada por la ley de escala de tipo *Family–Vicsek* [5].

Consideremos un proceso con una interfase inicialmente plana, $h(x, 0) = 0$. El desarrollo de la rugosidad presenta dos regímenes fuertemente marcados. A tiempos cortos, las fluctuaciones locales no han tenido tiempo de propagarse por toda la red, por lo que la anchura crece temporalmente siguiendo una ley de potencias $W \sim t^\beta$, donde β es el *exponente de crecimiento*. Sin embargo, la información física se propaga lateralmente con una longitud de correlación $\xi_{||} \sim t^{1/z}$. En un tiempo de saturación $t_{\text{sat}} \sim L^z$, esta longitud alcanza el tamaño total del sistema. A partir de este momento, la rugosidad satura en un valor W_{sat} que depende únicamente del tamaño espacial:

$$W(L, t) \sim \begin{cases} t^\beta, & \text{si } t \ll t_{\text{sat}} \\ L^\alpha, & \text{si } t \gg t_{\text{sat}} \end{cases} \quad (2.1)$$

siendo α el *exponente de roughening* y z el *exponente dinámico*. Motivados por el comportamiento de ecuaciones lineales, tanto Family y Vicsek [5], así como Jullien y Botet [12], propusieron un *Ansatz* de escala dinámica que unifica ambos regímenes en una única expresión:

$$W(L, t) \sim L^\alpha f_{FV} \left(\frac{t}{L^z} \right), \quad (2.2)$$

donde la función de escala universal $f_{FV}(u)$ se comporta asintóticamente como u^β para $u \ll 1$ y tiende a una constante para $u \gg 1$. Con esta relación dedujimos una de las relaciones fundamentales de la clase de universalidad KPZ: $\beta = \alpha/z$, garantizando que la dependencia espacial

L se cancele en el régimen de crecimiento temprano. Con esta hipótesis se comprobó numéricamente que los datos de los diversos modelos discretos convergen a los valores universales de la clase KPZ en $1 + 1$ dimensiones: $\alpha = \frac{1}{2}$ y $z = \frac{3}{2}$ [4].

2.2 Factor de estructura y escalado anómalo

Además de la rugosidad global, la información contenida en la interfase puede estudiarse a través de su factor de estructura, o *Power Spectral Density* (Densidad Espectral de Potencia) (PSD),

$$S_h(k, t) = \left\langle |\hat{h}(k, t)|^2 \right\rangle, \quad (2.3)$$

donde $\hat{h}(k, t)$ es la transformada de Fourier de la altura.

En un sistema que obedece escalado dinámico estándar en dimensión espacial d , el factor de estructura satisface

$$S_h(k, t) \sim k^{-(2\alpha+d)} f_S(k^z t), \quad (2.4)$$

siendo f_S una función de escala universal. En el caso convencional, esta función tiene el comportamiento

$$f_S(u) \sim \begin{cases} u^{(2\alpha+d)/z}, & u \ll 1, \\ \text{cte}, & u \gg 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sin embargo, en muchos sistemas fuera del equilibrio aparece un fenómeno más sutil conocido como *escalado anómalo*. En este caso, el exponente extraído del espectro, que denotaremos α_s y llamaremos *exponente espectral*, no coincide necesariamente con el exponente global α obtenido a partir de la rugosidad. Entonces, el factor de estructura se reescribe de forma más general [9] como

$$S_h(k, t) \sim k^{-(2\alpha_s+d)} f_s(k^z t), \quad (2.6)$$

donde la función f_s ya no tiene por qué saturar a una constante en el régimen estacionario.

La interpretación física de esta separación entre α y α_s es importante: α controla el escalado global de la interfase, mientras que α_s refleja cómo se distribuyen las fluctuaciones en el espacio de Fourier. Cuando ambos coinciden, el sistema presenta un escalado ordinario. Cuando difieren, la superficie exhibe una estructura más compleja.

2.3 La ecuación Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)

En la década de 1960, Murray Eden [13] propuso el primer modelo de crecimiento estocástico en el contexto del crecimiento de células cancerígenas. Con una simplificación de este proceso biológico, ideó un modelo estocástico lineal que representaba el estado de estas células. Visto actualmente, puede recordar al *juego de la vida de Conway*, pues otorga a cada célula cancerígena una probabilidad de hacer que sus vecinas se *infecten*.

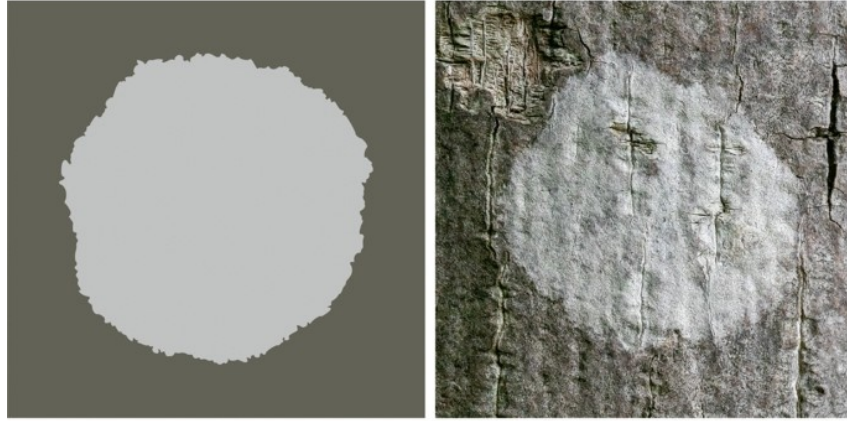


Figura 2.2: Simulación de un cluster de Eden bidimensional y un líquen (*Phlyctis argena*) cuyo proceso de crecimiento coincide con el modelo de Eden [14].

Pese a los numerosos intentos, el objetivo de obtener una PDE que sea capaz de describir, reproducir y lo más importante, dar información del sistema, no se había logrado. Edwards y Wilkinson introdujeron su ecuación lineal [15]

$$\partial_t h = \nu \nabla^2 h + \eta(x, t). \quad (2.7)$$

Fue un gran intento pues era resoluble, sin embargo, sería necesario aplicar cambios que permitieran abstraerse a más casos.

Fue así como, analizando su comportamiento se observó que muchas de las superficies que nos encontramos no crecen en una única dirección. Por ello, parecía razonable presentar un término no lineal que capturase este *crecimiento lateral*. Además de este razonamiento físico, analizando geoméricamente el mecanismo de crecimiento de una superficie puede observarse que el término de corrección que es necesario para no infraestimar la lateralidad frente al crecimiento uniforme de EW es del orden de $\sqrt{1 + (\nabla h)^2}$.

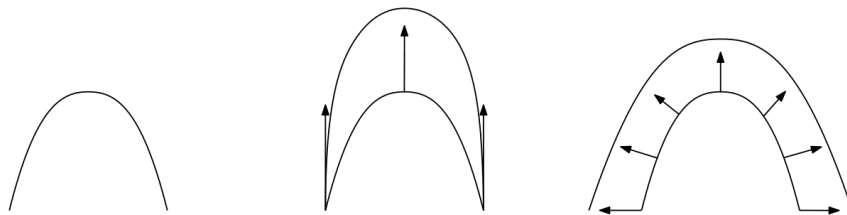


Figura 2.3: Representaciones de una superficie en función del tipo de crecimiento. La primera muestra una superficie estática, la segunda únicamente afectada por el término lineal y en último lugar la influencia del término $(\nabla h)^2$. En ella podemos apreciar la necesidad del término no lineal en la ecuación que describa este tipo de fenómenos.

En este punto, suponiendo que $(\nabla h)^2$ es pequeño, se puede desarrollar en serie la raíz, dando lugar a la ecuación Kardar-Parisi-Zhang (KPZ):

$$\partial_t h = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t) \quad (2.8)$$

donde el ruido, en el caso canónico descorrelacionado, satisface:

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = D \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (2.9)$$

Antes de pasar a introducir los polímeros dirigidos y su conexión con la ecuación KPZ, es imperativo hacer un análisis de las características fundamentales de la Ecuación (2.8). En primer lugar, la ecuación no es simétrica bajo inversión espacial de la altura ($h \nrightarrow -h$). Este hecho, que no se da originalmente en el modelo de Edwards-Wilkinson, permite distinguir dos fenomenologías en la superficie descrita: un término no lineal positivo modela procesos de crecimiento (como BD), mientras que uno negativo hace referencia a procesos erosivos.

En segundo lugar, la evolución temporal dictada por la ecuación KPZ obedece la hipótesis de escala de Family–Vicsek. Su comportamiento asintótico queda unívocamente determinado por los tres exponentes críticos mencionados en el Capítulo 1, α, β, z .

Finalmente, cabe destacar que estos exponentes no son independientes entre sí. Además de la ya justificada $\beta = \alpha/z$, una de las propiedades matemáticas más profundas de la clase de universalidad KPZ es la conocida como *Invarianza Galileana*

$$\alpha + z = 2, \quad (2.10)$$

Tal y como se adelantó en el Capítulo 1, la robustez de esta relación se ve afectada por la introducción de ruido correlacionado temporalmente (ver la deducción de la *Invarianza Galileana* en el Apartado B.1).

2.4 Polímeros dirigidos en medios descorrelacionados

Pasemos ahora al modelo que ocupa este TFG. Imaginemos una partícula que se mueve en una red bidimensional, una coordenada espacial y otra temporal, y que únicamente puede avanzar hacia delante en el tiempo y a la derecha o a la izquierda. Situémonos si no en una cuerda de longitud L a la que podemos adherir distintos pines dispersos en una red reticular. Estos escenarios representan el modelo de DPRM.

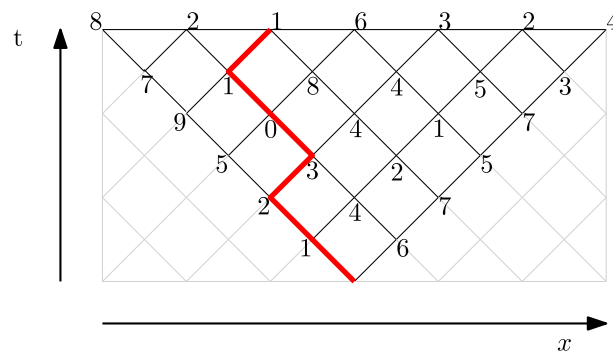


Figura 2.4: Esquema de un polímero dirigido. Puede observarse en rojo el camino de mínima energía y en cada sitio de la red una energía aleatoria, con valores enteros de la distribución $U[0, 9]$.

Tal y como podemos observar en la Figura 2.4, de manera intuitiva no estamos tratando más que una flecha dirigida en una dirección preferente, de abajo hacia arriba en este caso, con libertad de movimiento lateral restringida a un paso por unidad de tiempo.

2.4.1 Definición

Es fácil generalizar la noción de **Polímero Dirigido** (*Directed Polymer*) (DP) previamente expuesta a contextos más abstractos de manera que podemos definir los **DPRM** como objetos en $\mathbb{Z}^{N+1}$ cuyo movimiento se da en direcciones restringidas (generalmente hacia adelante en el tiempo t , con saltos laterales en x) sobre una red discreta.

De este modo, los polímeros se entienden como líneas elásticas o flechas bajo un *paisaje de energía desordenado*. Cada sitio de la red (x, t) tiene asociado un potencial aleatorio o *impureza* $\eta(x, t)$. El polímero, en su crecimiento, busca una configuración que optimice una función de coste global, compitiendo entre dos efectos contrapuestos: la elasticidad (que penaliza los estiramientos bruscos o desviaciones laterales grandes) y el desorden (que ofrece pozos de potencial relevantes a nivel energético). Así, el problema se convierte en buscar una solución combinatoria óptima en un medio aleatorio, lo que conecta este modelo con problemas de optimización global.

2.4.2 Transformación de Cole-Hopf

Entre 1950 y 1951, de forma independiente, Eberhard Hopf [16] y Julian Cole [17] desarrollaron una herramienta matemática fundamental para tratar ecuaciones diferenciales no lineales. En el contexto de **KPZ**, esta transformación permite linealizar la ecuación (2.8) mediante el cambio de variable:

$$Z(x, t) = \exp \left(\frac{\lambda}{2\nu} h(x, t) \right) \quad (2.11)$$

Sustituyendo, (ver en Proposición B.2.1 para más detalles), podemos reescribir la evolución temporal de Z como:

$$\partial_t Z = \nu \nabla^2 Z + \frac{\lambda}{2\nu} \eta(x, t) Z \quad (2.12)$$

Esta ecuación describe la evolución de la función de partición Z de un polímero dirigido en un potencial aleatorio $\eta(x, t)$. La importancia de este resultado es doble: por un lado, establece un mapeo exacto entre el problema de crecimiento de superficies (**KPZ**) y la física estadística de polímeros; por otro, nos permite utilizar herramientas de integración de caminos para estudiar los exponentes críticos.

2.4.3 Conexión con la ecuación KPZ

Esta reformulación de la ecuación **KPZ** permitió el estudio de nuevas propiedades del problema del crecimiento de superficies definiendo los polímeros dirigidos mediante una función de partición que, en su versión continua toma la forma:

$$Z(\mathbf{x}, t) = \int_{(0,0)}^{(\mathbf{x},t)} \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{T} \int_0^t d\tau \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right)^2 + \eta(\mathbf{x}(\tau), \tau) \right] \right\} \quad (2.13)$$

Donde el primer término del exponente, proporcional a la velocidad al cuadrado, representa la energía elástica o tensión superficial del polímero (penaliza caminos muy curvos), y el segundo término $\eta(\mathbf{x}, \tau)$ representa el potencial desordenado del medio. El parámetro T juega el papel de la temperatura, controlando las fluctuaciones térmicas del polímero.

Así, esta descripción de los DPRM permite ignorar la mayor parte de detalles microscópicos, capturando en su función de partición el comportamiento de escala del problema. La conexión clave es que la energía libre del polímero se define como $F(x, t) = -T \ln Z(x, t)$. Dado el mapeo de Cole-Hopf ($h \sim \ln Z$), concluimos que la altura de la interfase KPZ es equivalente (salvo constantes) a la energía libre del polímero: $h(x, t) \sim -F(x, t)$.

De este modo, podemos encontrar las siguientes cantidades relacionadas con los exponentes mencionados en KPZ:

- **Rugosidad transversal (ζ):** En términos geométricos, la desviación típica lateral del polímero escala como $\Delta x \sim L^\zeta$. Esto se relaciona con el exponente de rugosidad de la superficie (o el inverso del exponente dinámico z en KPZ).
- **Fluctuación de energía (ω):** La energía libre no está fijada en el DPRM debido al desorden, y sus fluctuaciones estándar ΔF crecen con el tiempo caracterizadas por el índice ω , que corresponde al exponente de crecimiento β de la interfase.

La mayor parte de estudios mediante métodos de *Transfer Matrix*, que se explicarán en el Capítulo 3, se realizan para el límite de temperatura cero ($T \rightarrow 0$). Esta última magnitud aparece de forma natural al plantear los polímeros como un problema de mecánica estadística. En $T = 0$, la integral de caminos está dominada por el punto de silla, es decir, la contribución a Z proviene casi exclusivamente del único camino que minimiza la energía global. A este camino se le denomina *Ground State* (estado fundamental).

2.4.4 Métodos de resolución

El modelo de DPRM constituye un problema canónico en la física estadística de sistemas desordenados y en general, como se ha introducido previamente, representa una gran cantidad de sistemas de estadística o combinatoria con numerosas aplicaciones. Desde una perspectiva analítica, el problema ha sido abordado mediante herramientas sofisticadas. El comportamiento de escala y los exponentes críticos se han estudiado extensamente mediante el *Grupo de Renormalización* [18]. Más notablemente, la integrabilidad exacta del modelo en ciertas condiciones (como la distribución de ruido específica) ha permitido el uso del *Bethe Ansatz* de réplicas [19], una técnica que facilitó la obtención analítica de las distribuciones de probabilidad de la energía libre (distribuciones de Tracy-Widom) para la clase de universalidad KPZ [20].

Desde la vertiente computacional, el cálculo de la configuración de mínima energía del polímero puede interpretarse como un problema de optimización global en un paisaje de energía aleatorio. Es de destacar que en esencia, los polímeros comparten su núcleo con problemas clásicos de complejidad computacional como el *Problema del Viajante* (TSP) o la búsqueda de estados fundamentales en vidrios de espín (que suelen ser problemas NP-completos). El hecho de *dirigir* el crecimiento del polímero sirve como método para reducir la complejidad a tiempos polinomiales, lo que lo hace una técnica particularmente rápida computacionalmente, constituyendo una gran ventaja frente a métodos de integración u otros modelos que requieren técnicas heurísticas como los *algoritmos genéticos* [21] o el *Simulated Annealing* [22].

2.4.5 Modelos Discretos

Para el estudio computacional, es necesario discretizar la integral de caminos continua presentada anteriormente. En una red reticular, un polímero dirigido de longitud L se define como una secuencia de coordenadas $\Gamma = \{x(0), x(1), \dots, x(L)\}$ tal que $|x(t) - x(t-1)| = 1$ (en la geometría $1 + 1$ diagonal).

A cada sitio (x, t) de la red se le asigna una energía aleatoria $\eta(x, t)$. El Hamiltoniano del sistema discreto, que representa la energía total de una configuración o camino específico Γ , viene dado por la suma de las energías de sitio visitadas:

$$H_\Gamma = \sum_{t=0}^L \eta(x(t), t) \quad (2.14)$$

Así, se obtiene la función de partición discreta:

$$Z(x, t) = \sum_{\Gamma \rightarrow (x, t)} e^{-\beta H_\Gamma} \quad (2.15)$$

En el límite de temperatura cero ($T \rightarrow 0$ o $\beta \rightarrow \infty$), la suma en la función de partición está dominada enteramente por el camino que minimiza el Hamiltoniano.

Resulta de especial interés teórico destacar que este enfoque de optimización discreta no solo define la dinámica del polímero, sino que permite establecer conexiones exactas con otros problemas canónicos de la mecánica estadística, como el límite de la *percolación*¹. Definiendo el Hamiltoniano con la norma L_∞ , es decir, la energía del camino viene dada por:

$$H_\Gamma = \max_{0 \leq t \leq L} \eta(x(t), t) \quad (2.16)$$

el objetivo del polímero pasa a encontrar la trayectoria *minimax*, es decir, aquella que minimiza la energía máxima sorteada. En el límite ($L \rightarrow \infty$), el valor de esta energía crítica E_c por debajo de la cual resulta estrictamente imposible encontrar un camino continuo que cruce el sistema, converge al umbral crítico de percolación, $p_c \simeq 0,6445$ [4]. Esto evidencia una vez más la profunda conexión entre la geometría y crecimiento del modelo de polímeros con procesos en medios desordenados.

2.5 Medios correlacionados

Hasta este punto, el desarrollo teórico de la ecuación KPZ y el modelo de DPRM se ha fundamentado en la hipótesis de un ruido blanco gaussiano, caracterizado no solo por la ausencia de memoria tanto espacial como temporal, sino también por la dependencia de los momentos de orden superior con el de segundo orden η_2 . En este paradigma canónico, las correlaciones del desorden decaen de manera instantánea, $\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle \propto \delta(x - x') \delta(t - t')$. Sin embargo, como se ha mencionado en el Capítulo 1, en numerosos sistemas físicos el medio presenta dinámicas con memoria, lo que introduce correlaciones de largo alcance que alteran

¹Según la RAE: *percolar*, Del lat. *percolāre* 'filtrar, colar'. Dicho de un líquido: Moverse a través de un medio poroso.

la fenomenología del sistema. El estudio de las correlaciones en el crecimiento de interfases fue formalizado en 1989 por Medina, Hwa, Kardar y Zhang [23].

En dicho artículo, mediante el uso de técnicas de *Renormalization Group* (Grupo de Renormalización) (RG) aplicadas a la ecuación de KPZ, se analizó el efecto de un ruido cuyas correlaciones decaen espacial o temporalmente siguiendo leyes de potencias de la forma $\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle \sim |x - x'|^{2\rho-1} |t - t'|^{2\theta-1}$. Medina *et al.* demostraron que la presencia de estas correlaciones de largo alcance, siempre que superen un determinado umbral crítico, actúan como perturbaciones fuertemente relevantes, provocando que el sistema fluya hacia nuevas clases de universalidad gobernadas por exponentes críticos que dependen explícitamente de los parámetros de correlación.

El estudio computacional discreto de los Polímeros Dirigidos en Medios Aleatorios (DPRM) ha estado históricamente enfocado en la correlación espacial. Por el contrario, el impacto dinámico de una memoria pura introducida a lo largo del eje temporal del polímero constituye un terreno notablemente menos explorado. Pese a la aparente solidez de este marco teórico, los resultados recientes [7] apuntan a líneas aún por investigar, por lo que este TFG se enmarca en un contexto novedoso donde la bibliografía es reducida y cuyos resultados pueden ser el germen de futuras vías para caracterizar el efecto de las correlaciones temporales en una de las clases de universalidad más contrastadas como lo es la de KPZ sin correlación.

Metodología

En este capítulo detallamos la metodología seguida para simular el crecimiento de polímeros dirigidos. Comenzaremos introduciendo el algoritmo de optimización utilizado, llamado Matriz de Transferencia (*Transfer Matrix*), que nos permite definir una energía asociada al DP, para posteriormente profundizar en la técnica utilizada para generar el ruido con correlaciones temporales, que es uno de los pilares de este trabajo. Finalmente, estudiaremos la geometría de la red del caso canónico, delegando al Capítulo A la implementada por nosotros, motivando la elección tomada para abordar el problema.

3.1 Método de la matriz de transferencia

El DPRM en 1+1 dimensiones admite una solución determinista y eficiente mediante técnicas de programación dinámica. En este trabajo, adoptamos el enfoque numérico conocido en física como el método de la *Transfer Matrix* o Matriz de Transferencia. Este método transforma el problema de optimización global en una relación de recurrencia con la que definimos la evolución del polímero. La energía libre $E(x, t)$ que termina en la posición transversal x al tiempo t se construye iterativamente a partir de los pasos anteriores:

$$E(x, t + 1) = \min \{ E(x + 1, t) + \eta(x + 1, t), E(x - 1, t) + \eta(x - 1, t) \} \quad (3.1)$$

donde el término $\eta(x, t)$ representa el desorden o ruido asociado al sitio (x, t) de la red.

El núcleo de este trabajo reside precisamente en la naturaleza estadística de este término $\eta(x, t)$. Mientras que el modelo estándar (y la mayoría de soluciones analíticas) asume que η es ruido blanco gaussiano¹, en las siguientes secciones introduciremos una correlación temporal no trivial para estudiar su impacto en la clase de universalidad KPZ con correlación.

3.2 Generación del Ruido Correlacionado

Como se ha mencionado, el ruido puede ser de diversas naturalezas, en función de la relación que hay entre los distintos puntos de la red. En la literatura, los modelos más estudiados han sido los de ruido descorrelacionado ($\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle \simeq \delta(x - x') \delta(t - t')$) o correlacionado espacialmente ($\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle \simeq f(|x - x'|) \delta(t - t')$). Elementalmente, entendemos que estos tipos de ruido representan paisajes de energía en los que es indiferente *dónde* y en *qué*

¹Esto quiere decir que, al ser gaussiano, los momentos de orden superior dependen del de segundo orden y por otro lado; al ser blanco, se asume una estructura de correlación dada por *Deltas de Dirac* δ .

momento estamos o donde sí importa la posición. En este trabajo tratamos el caso de ruido correlacionado temporalmente, es decir, que tiene memoria sobre *dónde estuvo* el polímero. Para poder visualizar cómo se dibuja este panorama en la red podría pensarse en un mapa sobre el que, si en un punto dado se da una montaña o un valle, entonces a lo largo de ese punto en el tiempo se preservará, en mayor o menor medida, esta condición. Así habrá una predilección a generar regiones de baja o alta energía, haciendo que el polímero tienda a recorrer estas zonas.

Para poder incluir este tipo de ruido, es necesario conocer cómo generarlo e implementarlo. Matemáticamente, buscamos que la correlación siga una ley de potencias o *power-law*:

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle \sim |t - t'|^{-\beta-1} \quad (3.2)$$

Este tipo de ruido, también conocido como ruido $1/f^\beta$ es muy utilizado en el sector de la ingeniería de Telecomunicaciones [24]. Más particularmente, toma distintos nombres dependiendo del régimen que abarca. En este estudio se tomó el intervalo $\beta^3 \in [0, 1)$, pasando de un caso descorrelacionado (ruido blanco) al de fuertemente correlacionado (ruido rosa).

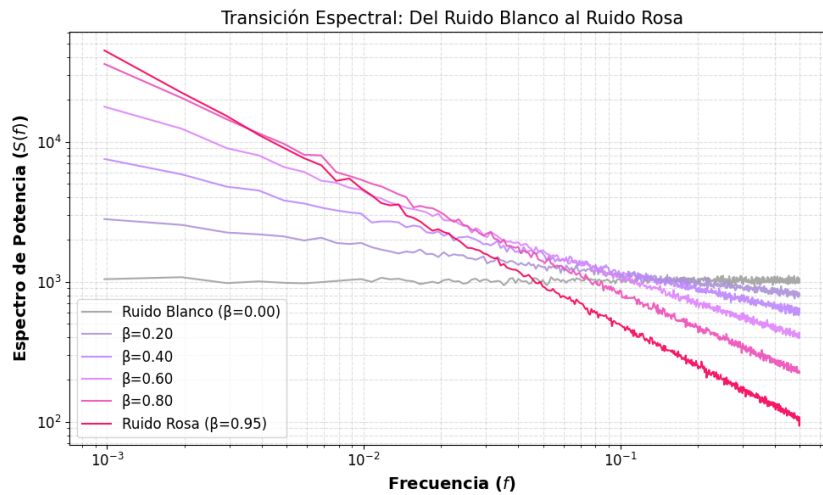


Figura 3.1: Representación en el dominio de frecuencias de distintos tipos de ruido generados con nuestra implementación de correlación $1/f^\beta$.

3.2.1 Transformada continua de Fourier

Las propiedades de la *Transformada de Fourier* del ruido de la Ecuación (3.2) permiten una fácil implementación y control numérico, tal y como se presenta a continuación.

Definición 3.2.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ una función integrable Lebesgue. Definimos la transformada de Fourier como:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (3.3)$$

A partir de esta definición formal y de la forma que toma el ruido (Ecuación (3.2)) una función $|t - t'|^{2\theta-1}$ tiene en el espacio recíproco un espectro:

$$S(\omega) \sim \frac{1}{|\omega|^{2\theta}} \quad (3.4)$$

²El 1 del exponente es un artificio del cálculo de manera que se consiga una relación ω^β en el espacio recíproco, podría no incluirse sin mayores consecuencias.

³Como se mencionó al inicio del trabajo, $2\theta = \beta$.

donde el exponente θ controla la intensidad de la memoria del sistema. Esta propiedad es demostrable haciendo uso de la definición de la transformada de Fourier (Definición 3.2.1) y herramientas elementales del cálculo (ver la demostración en Apartado B.3).

3.2.2 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Una vez conocemos la relación que hay entre el ruido en el espacio real y recíproco (Ecuación (3.4)), hay que recalcar que estas definiciones son continuas, lo cual es inviable desde el punto de vista computacional. De este modo, para utilizar esta técnica de filtro espectral es necesario introducir la *Discrete Fourier Transform* (Transformada Discreta de Fourier) (DFT) para una secuencia $\{x_n\}$ con $n \in \{0, \dots, N-1\}$ como:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N}n} \quad (3.5)$$

La *Inverse Discrete Fourier Transform* (Transformada Discreta de Fourier Inversa) (IDFT) permite recuperar la señal en el dominio temporal:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi \frac{k}{N}n} \quad (3.6)$$

El cálculo directo de la DFT tiene una complejidad $O(N^2)$. Para optimizar el tiempo de cómputo, especialmente dado que necesitamos generar ruido para todos los sitios de la red en cada paso de tiempo, utilizamos el algoritmo de la *Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier) (FFT)⁴, descrita originalmente por Cooley y Tukey [25], que reduce la complejidad a $O(N \log N)$ y está implementado como librería en Python.

3.2.3 Algoritmo de Generación de ruido

Definimos de este modo la siguiente rutina para generar un N -vector de ruido correlacionado con exponente θ :

1. *Generación de Ruido Blanco*: Se almacena una secuencia $u(t)$ de longitud N de números aleatorios gaussianos descorrelacionados, tal que $\langle u(t) \rangle = 0$ y $\sigma = 1$.
2. *Transformada al Espacio de Frecuencias*: Se calcula la transformada rápida de Fourier de la secuencia: $\hat{u}(\omega) = \text{FFT}(u(t))$.
3. *Filtrado Espectral*: Este es el paso más importante pues es donde introducimos la correlación. Para ello, se multiplican los coeficientes de Fourier por el factor de peso correspondiente de manera que se obtiene una serie tal que $S(\omega) \sim 1/\omega^\beta$ (Ver Apartado B.3).
4. *Transformada Inversa*: Para volver al dominio original, se aplica la IFFT

$$\eta(t) = \Re(\text{IFFT}(\hat{\eta}(\omega)))^5$$

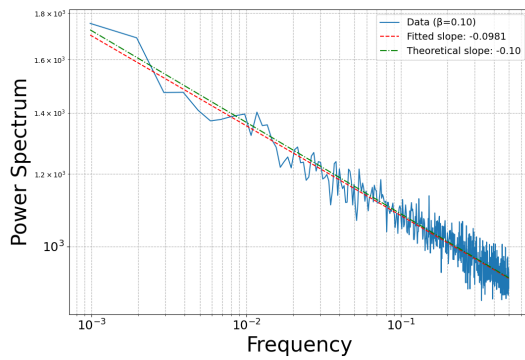
⁴De manera análoga se obtiene el método para *Inverse Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier Inversa) (IFFT)

⁵Se toma la parte real para eliminar residuos numéricos imaginarios, aunque teóricamente el resultado debería ser real.

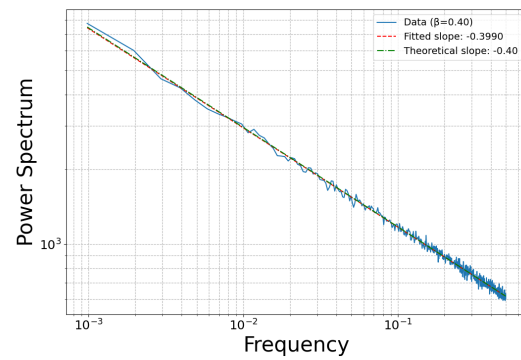
Esto se repite de forma independiente para cada posición x de la red, asegurando que el ruido esté correlacionado temporalmente pero descorrelacionado espacialmente.

3.3 Comprobación del algoritmo

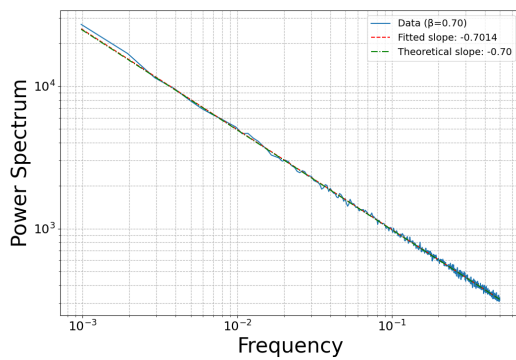
Es imperativo comprobar que efectivamente el ruido se comporta con el índice de correlación deseado. De no ser así, las conclusiones extraídas en este trabajo dejarían de ser válidas. Para ratificar que la serie temporal resultante obedece estrictamente la estadística $1/f^\beta$, se ha diseñado un algoritmo para verificar el comportamiento del generador de ruido. En este análisis, se toma una serie unidimensional de gran longitud (2^{20} pasos) con el objetivo de minimizar los efectos de tamaño finito, y a continuación, se procede a calcular su PSD. Para reducir el ruido estadístico se implementa un cálculo por ventanas, de manera que se divide la señal original, calculando sub-intervalos de tamaño 2^{10} y se promedian. Finalmente, se extrae el exponente empírico realizando una regresión lineal sobre el espectro en escala $\log\text{-}\log$. Los resultados de esta validación espectral se exponen en la Figura 3.2.



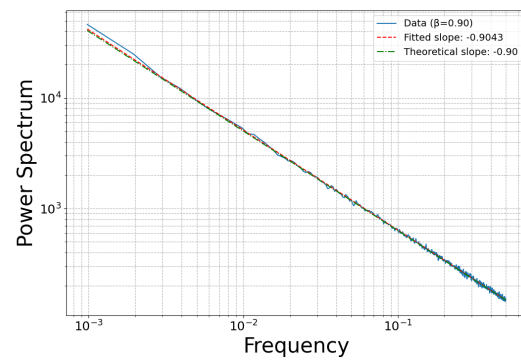
(a) Ruido $\beta = 0,1$.



(b) Ruido $\beta = 0,4$.



(c) Ruido $\beta = 0,7$.



(d) Ruido $\beta = 0,9$.

Figura 3.2: Espectro de frecuencias del ruido generado mediante el algoritmo espectral. Puede observarse el ajuste lineal (rojo) frente a la pendiente teórica deseada (verde) en función del índice β impuesto.

Tal y como se ilustra en la Figura 3.2, para correlaciones débiles, como en el caso de $\beta = 0,1$, el espectro presenta una mayor dispersión estadística; un comportamiento esperable dado que

la señal se aproxima al límite del ruido blanco puro. Por el contrario, el algoritmo demuestra una gran robustez en el régimen de fuerte correlación ($\beta = 0,9$). En este límite, las transformadas discretas de Fourier suelen verse severamente afectadas por artefactos numéricos. Sin embargo, la rutina implementada preserva el espectro sin desviaciones apreciables. Esta validación certifica la fiabilidad del generador de ruido, garantizando que el paisaje sobre el que evolucionará el polímero posee exactamente la memoria temporal exigida por el marco teórico.

3.4 Geometría de la red

Un detalle crucial para el estudio de los polímeros es la elección de la geometría de la red sobre la que evoluciona. A continuación se presenta la canónica en la literatura, una red rectangular en la que el camino crece describiendo una forma de cono. Esta disposición es probablemente la más intuitiva, sin embargo, en el problema correlacionado se optó por otra alternativa, una red cuadrada rotada, que nos facilita la implementación del ruido en el caso correlacionado. Ambas geometrías son totalmente equivalentes pero es necesario estudiar con detenimiento la simetría del problema para introducir correctamente el ruido. Así pues, a continuación se aborda la más habitual en los textos sobre [DPRM](#) y en el [Capítulo A](#) pueden encontrarse los detalles acerca de la utilizada por nosotros. En resumen:

- Mediante la geometría rectangular se evaluará el modelo clásico. Esta es la implementación *más natural*, correspondiéndose con la descripción más fiel al concepto que se tiene de un [DPRM](#). En esta red, se obtendrán los exponentes críticos *clásicos*, verificando nuestro algoritmo.
- Se aplicará la transformación de coordenadas para pasar de la red rectangular a la *cuadrada rotada* con el fin de facilitar la introducción del ruido correlacionado. En esta topología se correrán las simulaciones finales, obteniendo los nuevos exponentes y se realizará el análisis final en el [Capítulo 5](#)

3.4.1 Red rectangular

Se dispone de una red rectangular con coordenadas (x, t) discretas en la que t hace referencia a la dirección temporal o *longitud* del polímero, mientras que x es la dirección transversal o espacial.

Para evitar posibles problemas de frontera, se genera un retículo de tamaño $X \times L$, con $X = 2 \cdot L + 1$, donde L es el tamaño del sistema que se va a estudiar. Esto garantiza que el polímero nunca alcance los bordes durante una evolución de L pasos. Así, no se impone ningún tipo de condición lateral y el polímero avanza libremente. Al situar el origen en el centro, podemos aprovechar el movimiento del polímero reduciendo el tamaño de la red al cono causal que describe, de ahí que la red sea rectangular pero únicamente representemos, como se ve en la [Figura 3.3](#), un cono.

De este modo, en un instante t , si el polímero se encuentra en la posición x , entonces el siguiente será o bien $(x + 1, t + 1)$ o bien $(x - 1, t + 1)$.

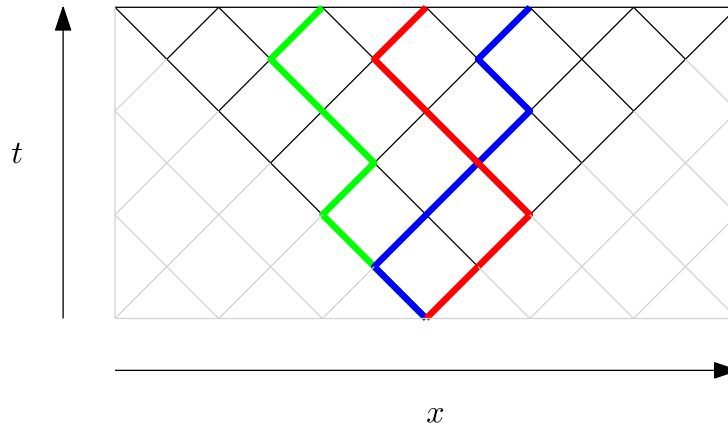


Figura 3.3: Representación esquemática de la geometría de red rectangular implementada. Se ilustra una versión de dimensión baja donde se aprecian tres posibles trayectorias del polímero en color verde, rojo y azul.

Respecto a la introducción de ruido en el problema distinguimos el caso blanco y el correlacionado.

En el primero, la implementación es directa, lo que se denomina *on-site*, es decir, se puede asignar un ruido a cada nodo o posición de la red. Habitualmente, y también en este caso, se introducen ruidos gaussianos ($\sim \mathcal{N}(0, 1)$) o uniformes entero ($\sim U[0, 9]$). No hay diferencia entre cuál de las dos distribuciones elegir, sin embargo, en la implementación del caso correlacionado, se da un posible beneficio de seleccionar los números enteros en lo que a almacenamiento se refiere. Esto se debe a que, a nivel computacional, guardar la información de números enteros es mucho más ventajoso para la memoria. En el Apartado 6.2 se abordará esta cuestión y las posibles ventajas que presenta, si bien destacamos que en el caso de ruido blanco, no hay una relevancia significativa sobre el tipo de distribución que se elija.

Para el caso correlacionado hay que tomar en cuenta la simetría de la red. El problema que abordamos es la correlación temporal, es decir, puntos fijos espacialmente deben *tener memoria*. Para ello, consideramos los puntos equivalentes de la red, aquellos que entendemos como *no habernos movido*. En este caso se observa que los movimientos que dejan inmóvil una posición son $+1, -1$ o $-1, +1$, lo que en referencia a la Figura 3.3 sería: *movernos a la derecha y luego a la izquierda* o viceversa. Esta situación hace que pasemos del modelo *on-site* del ruido blanco a *on-bond* (*sobre el enlace*), de manera que cada punto tendrá dos posibles ruidos, el proveniente de la izquierda, es decir, del movimiento $-1, +1$ y de la derecha $+1, -1$.

Supongamos que tenemos una matriz en la que cada número representa un vector correlacionado distinto. De este modo, para respetar la simetría descrita previamente, los puntos equivalente serán aquellos que provengan de los movimientos de *zig-zag*, es decir, el punto (x, t) estará correlacionado con $(x, t-2)$, $(x, t+2)$... La Figura 3.4 ilustra este comportamiento.

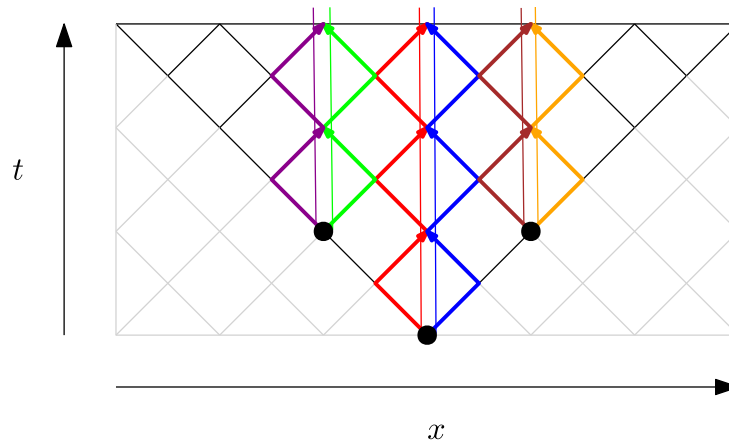


Figura 3.4: Representación de la introducción del ruido correlacionado en la red rectangular. Puede observarse en el mismo color los movimientos que dejan al polímero en el mismo sitio y diferenciados así también los *carriles* que se forman debido a la posibilidad de llegar por cada uno de los lados del nodo. Esto se realiza para todos los puntos de la red, pero para facilitar la comprensión se han dibujado en unos pocos de manera que no se superpusieran entre sí.

De cara a la programación, este método posee una gran ventaja, que es la implementación directa del ruido. Como contraparte, la indexación en el algoritmo de crecimiento se complica notablemente. Es necesario diferenciar entre las posiciones pares de las impares, para así determinar a qué *enlace* hay que acceder. El factor determinante en este caso pasa por la [Random Access Memory \(RAM\)](#). Mientras que en la red rectangular trabajamos con *arrays* del orden de $2L \times L$, en la red cuadrada es de $L \times L$. Requerimos así matrices de la mitad de tamaño, aumentando la capacidad de almacenamiento. De cualquier modo, tal y como se ha mencionado previamente, la aquí expuesta es la mayormente utilizada y consideramos que es la más ilustrativa.

Validación: DPRM sin correlación

Una vez presentado el eje sobre el que gira el trabajo y de haber expuesto la metodología a seguir para el estudio de la clase de universalidad [KPZ](#), pasamos a implementar numéricamente lo explicado en el Capítulo 3. Desarrollaremos a continuación el problema canónico del [DPRM](#) con ruido descorrelacionado, tanto espacial como temporalmente. El objetivo es validar el código que se ha desarrollado, demostrando la capacidad de reproducir los resultados clásicos de la literatura, específicamente los exponentes característicos ζ , ω y α .

4.1 Exponentes Universales

Como se ha explicado en el Capítulo 2, el problema del polímero dirigido puede entenderse o abordarse como una generalización compleja de una partícula o cuerda dirigida con restricciones en el movimiento. Así, un camino aleatorio simple a temperatura $T = 0$ constituye un problema de optimización global en el que el polímero busca los mínimos de energía en el fondo desordenado, lo que induce un *pinning* en pozos de potencial. De este modo el comportamiento asintótico del polímero viene caracterizado principalmente por tres exponentes.

1. **Exponente de *wandering* (ζ):** Describe cómo escala la desviación estándar de la posición del mínimo de energía frente al tamaño del polímero L .

$$\Delta x(L) \equiv \sqrt{\langle x(L)^2 \rangle - \langle x(L) \rangle^2} \sim L^\zeta \quad (4.1)$$

2. **Exponente de Fluctuación de Energía (ω):** Describe cómo escala la desviación estándar de la energía libre mínima acumulada frente a la longitud del polímero L .

$$\Delta E(L) \equiv \sqrt{\langle E(L)^2 \rangle - \langle E(L) \rangle^2} \sim L^\omega \quad (4.2)$$

3. **Exponente roughening (α):** Se define como el cociente

$$\alpha = \frac{\omega}{\zeta}. \quad (4.3)$$

Para el caso descorrelacionado, tal y como introdujo en la Ecuación (2.10), puede verse que $\alpha = 1/2$. Sin embargo, en el Capítulo 5 se observará la ruptura esta relación.

Para sistemas de dimensión $1 + 1$ existe un consenso teórico respaldado por resultados analíticos [4]. Los valores que definen esta clase de universalidad son:

$$\zeta = 2/3, \quad \omega = 1/3, \quad \alpha = 1/2 \quad (4.4)$$

Cabe recordar aquí lo expuesto en la Apartado 2.4.3 acerca del mapeo exacto entre los DPRM y la ecuación KPZ. La energía libre del estado fundamental del polímero, $E(x, t)$, juega un papel análogo al perfil de alturas $h(x, t)$ de la interfaz en crecimiento. Esta equivalencia nos permite entender los exponentes de los polímeros en términos de KPZ:

- La **fluctuación de la altura** de la interfaz crece en el tiempo como $W \sim L^{\beta_{KPZ}}$. En el polímero, esto equivale a las fluctuaciones de la energía libre con la longitud, de modo que se establece la identidad $\omega \equiv \beta_{KPZ} = 1/3$.
- La **longitud de correlación lateral** de la superficie escala como $\xi_{\parallel} \sim L^{1/z_{KPZ}}$, lo cual se traduce directamente en la desviación transversal o *wandering* del polímero al explorar el espacio, fijando la relación $\zeta \equiv 1/z_{KPZ} = 2/3$.
- El **exponente roughening** de la superficie (α_{KPZ}), que en la teoría de Family-Vicsek obedece la relación de escala $z_{KPZ} = \alpha_{KPZ}/\beta_{KPZ}$, puede recuperarse en el marco del polímero dirigido a través del cociente de sus exponentes: $\alpha_{KPZ} = \omega/\zeta = 1/2$.

Esta conexión nos permite investigar la clase de universalidad KPZ resolviendo el problema de optimización que representa DPRM.

4.2 Implementación

Para validar el algoritmo de *Transfer Matrix*, realizamos simulaciones con ruido de distribución $\mathcal{U}(1, 9)$. El crecimiento se ha simulado en redes de tamaño L desde 2^9 hasta 2^{13} .

4.2.1 Control de densidad

Para mantener la calidad de la estadística hemos utilizado una técnica para preservar la densidad de puntos de manera que el número de realizaciones (N_{sim}) disminuye a medida que aumenta la longitud del sistema (L), manteniendo el producto $N_{sim} \times L \simeq \text{Cte}$. Con este procedimiento aseguramos tener una concentración de puntos constante, evitando generar colas pesadas a tamaños de órdenes superiores, lo que podría alterar los ajustes debido al peso estadístico de estos valores.

Listing 4.1: Control de la densidad de estadística según el tamaño del sistema.

```

1  # Define a constant to control the density of points.
2  CONST = N_SIMULATIONS * m_l
3  [...]
4  for i in range(MIN_LENGTH, MAX_LENGTH + 1, 1):
5      # Lattice size
6      LENGTH = int(2**i)
7      X = int(2 * LENGTH + 1)
8      # Decrease number of simulations for larger systems to manage 'density' of points.
9      N_SIMULATIONS = int(CONST // LENGTH)

```

Analizamos así la evolución temporal de las fluctuaciones en escala logarítmica, donde la ley de potencias se manifiesta como una recta de pendiente igual al exponente crítico a estudiar, para un número de simulaciones iniciales de 10^5 .

4.2.2 Algoritmo de crecimiento

En este modelo, el ruido descorrelacionado $\eta(x, t)$ se asigna a cada una de las posiciones de la red de manera independiente (*on-site*). Mediante el método de la Matriz de Transferencia dado por la Ecuación (3.1), se calcula iterativamente la energía mínima para cada posición temporal. El siguiente fragmento de código destaca la sencillez para implementar la dinámica de crecimiento en esta geometría. Adicionalmente, se puede observar la técnica de reconstrucción de la trayectoria (TRACK_PATH), en la que se almacena la decisión óptima tomada localmente para posteriormente retrotraer el camino hasta el origen.

Listing 4.2: Algoritmo de crecimiento del polímero en el caso descorrelacionado y técnica de reconstrucción de la trayectoria mínima.

```

1 E_current = np.full(X, np.inf)
2 E_current[CENTER] = 0
3 for t in range(LENGTH):
4     epsilon_t = np.random.randint(1, 9, X)
5     left_side = E_current[:-2] + epsilon_t[:-2]
6     right_side = E_current[2:] + epsilon_t[2:]
7     E_next = np.full(X, np.inf)
8     E_next[1:-1] = np.minimum(left_side, right_side)
9     if TRACK_PATH:
10         pathing = left_side <= right_side
11         prev_matrix[t, 1:-1] = np.where(
12             pathing, np.arange(1, X - 1) - 1, np.arange(1, X-1)+1)
13     E_current = E_next
14 final_pos = np.argmin(E_current)
15 final_energy = E_current[final_pos]
```

4.2.3 Introducción del ruido

Como se mencionó en el Apartado 3.4, el caso del DPRM clásico se realizó como tal, conservando la geometría de una red rectangular y usando además el modelo de ruido *on-site*. De este modo, como muestra el Código 4.2, únicamente es necesario generar el ruido del tamaño de la red de manera que el mapeo sea directo con la posición que ocupa. Para mejorar la eficiencia del algoritmo, no es necesario almacenar todo el ruido en una matriz, ya que esto podría suponer un *bottleneck* en la memoria a sistemas grandes. Aprovechando el carácter recursivo del método de *Transfer Matrix* se genera un vector de longitud $2L + 1$ que se suma al vector que almacena la energía del paso actual. Así, una vez visitado el paso t se pasa al $t + 1$ sobrescribiendo los valores.

4.3 Visualización de los caminos óptimos

Antes de proceder a dar los valores de los exponentes críticos, resulta de utilidad realizar una inspección visual del sistema. Para ello, se han reconstruido las trayectorias óptimas para distintas longitudes L bajo ruido blanco. Así, en la Figura 4.1 puede observarse que a medida que aumenta la longitud del sistema, el polímero tiende a recorrer zonas de baja energía, lo que induce un comportamiento de *pinning* en estas regiones. Adicionalmente, al estar en el caso de ruido blanco puede apreciarse que la mayor densidad de líneas se concentra en el centro de la red, habiendo pocos caminos óptimos con una *lateralidad* o *curvatura* muy pronunciada.

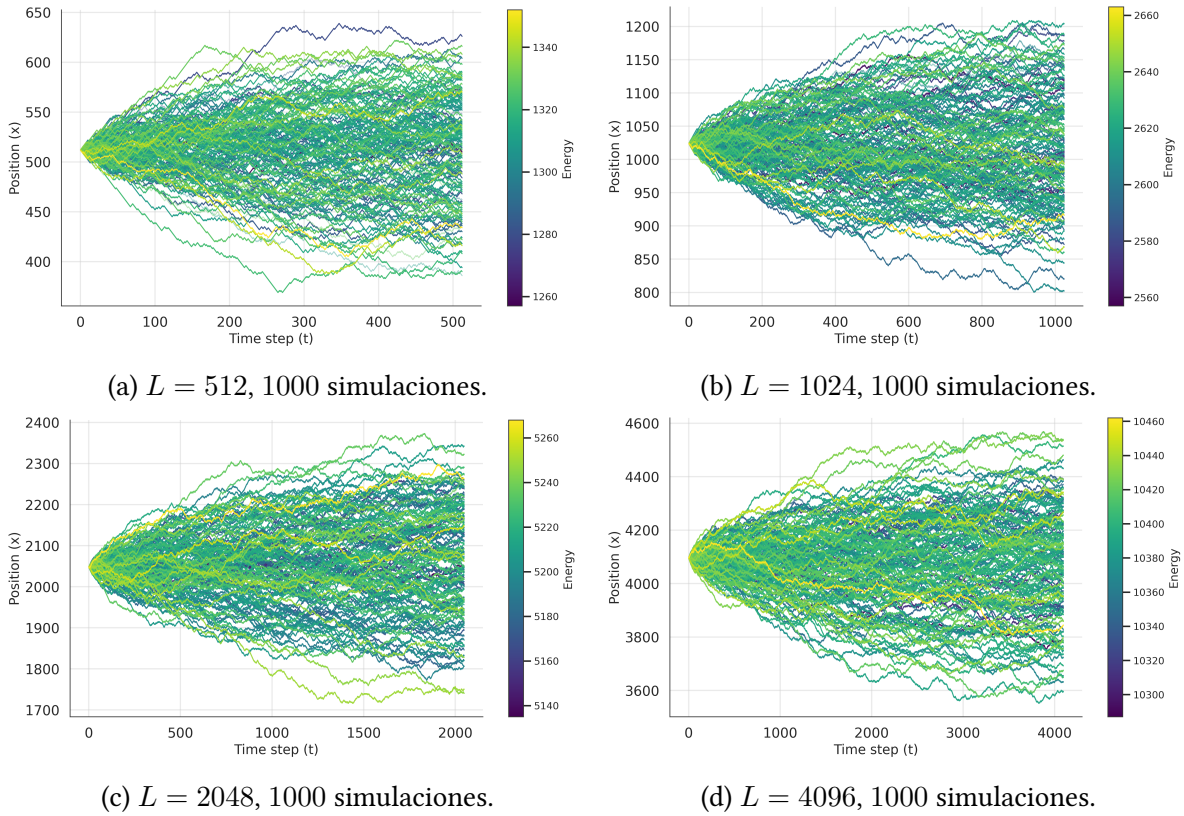


Figura 4.1: Caminos óptimos reconstruidos para longitudes desde 2^9 , 2^{10} , 2^{11} y 2^{12} . Se superponen 1000 realizaciones a las que se le asigna su energía final para crear el mapa de calor cuya leyenda se puede observar a la derecha de la gráfica.

Más allá de esta exploración, cabe mencionar, acerca de la escala de energías con la que se grafica el mapa de calor, que las fluctuaciones de esta energía mínima final no obedecen una estadística gaussiana. En la clase de universalidad [KPZ](#), la probabilidad converge asintóticamente a la distribución de Tracy-Widom [\[20\]](#), [\[26\]](#), [\[27\]](#). Esta universalidad dicta que distintos tipos de variables aleatorias convergen a una misma ley bajo fluctuaciones extremas, vinculando el crecimiento de interfaces con la teoría de matrices aleatorias y sistemas con fuertes correlaciones espaciales.

4.4 Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los exponentes críticos mencionados. Cabe destacar que, si bien los valores calculados son consistentes con la teoría, la interpretación de los intervalos de error difiere ligeramente de otras ramas de la física. Las simulaciones numéricas están sujetas a dos fuentes de incertidumbre: un error puramente estadístico ($\propto 1/\sqrt{N_{\text{sim}}}$), que se mitiga promediando sobre un gran número de realizaciones y un error sistemático introducido por los efectos de tamaño finito del sistema, cuya cuantificación analítica no siempre es abordable. Para paliar este último, el estudio se ha realizado sobre diferentes tamaños de red. Por tanto, más que exigir una compatibilidad estricta dentro de un margen de $2,5\sigma$ u otros estándares, para una medida aislada, el criterio de validez de estos resultados reside en observar su convergencia asintótica hacia los valores universales esperados al escalar el sistema.

4.4.1 Exponente de *wandering* (ζ)

En la Figura 4.2 mostramos el desplazamiento cuadrático medio. El ajuste lineal reporta $\zeta = 0,664 \pm 0,008$. Este valor coincide con el resultado teórico esperado $2/3 \simeq 0,667$.

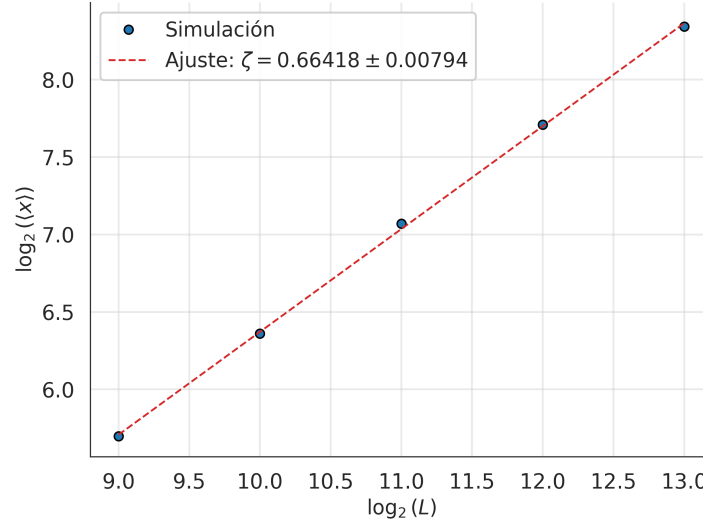


Figura 4.2: Escalado del *wandering* vs tamaño del sistema L en escala log-log. La línea roja discontinua indica la pendiente teórica $\zeta = 2/3$ y el error se corresponde con el valor reportado por el ajuste automático del método `linregress` de la librería `scipy`.

4.4.2 Fluctuaciones de energía (ω)

Análogamente, en la Figura 4.3 presentamos la desviación estándar de la energía. Obtenemos que $\omega = 0,329 \pm 0,007$, en concordancia con la $\omega = 1/3 \simeq 0,333$.

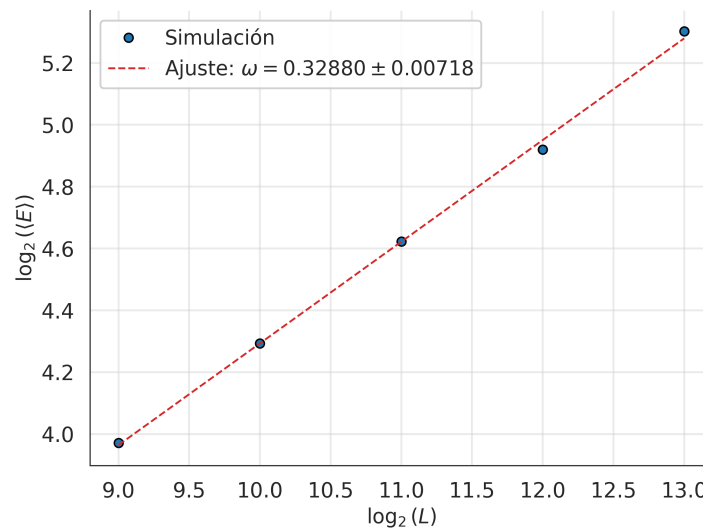


Figura 4.3: Escalado de las fluctuaciones de energía ΔE vs el tamaño de sistema L en escala log-log. La línea roja discontinua indica la pendiente teórica $\omega = 1/3$ y el error se corresponde con el valor devuelto por el ajuste automático del método `linregress` de la librería `scipy`.

4.4.3 Exponente roughening (α)

Aplicando la definición que se ha introducido al inicio del capítulo podemos observar que efectivamente,

$$\alpha = \frac{\omega}{\zeta} = 0,46 \pm 0,02 \simeq \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

tal y como esperábamos, confirmando además la Invarianza Galileana (Ecuación (2.10)).

Con estos resultados encontramos validado nuestro código pues los exponentes obtenidos son iguales a los que se pueden encontrar en la literatura.

4.5 Eficiencia del modelo

Cabe destacar que nuestra implementación de este problema es extremadamente eficiente. Las simulaciones realizadas en Python con cálculos vectorizados para el tamaño de sistema de 10^5 nos otorga una buena precisión en un tiempo de cómputo de 30 minutos. Las especificaciones de la máquina utilizada son:

Componente	Detalle Técnico
Procesador	Intel Core i7-1255U
Configuración de Núcleos	10 núcleos (2 Performance, 8 Efficient)
Subprocesos	12 hilos
Frecuencia Máxima	4.70 GHz
Memoria Caché	12 MB Smart Cache
Memoria RAM	16 GB DDR4-3200 MHz

Tabla 4.1: Especificaciones técnicas del procesador y memoria RAM.

Adicionalmente a la eficiencia del algoritmo debida a su implementación, subyace un hecho fundamental en la naturaleza del DPRM en contraposición a la resolución directa de la ecuación KPZ. En el problema abordado, no existen regímenes transitorios que sea necesario sortear para alcanzar el límite asintótico. Esto permite obtener los resultados desde longitudes de sistema relativamente pequeñas, lo que se traduce en una reducción muy significativa del tiempo de cómputo y menores requerimientos de memoria, que es el principal *bottleneck* que nos encontramos a la hora de intentar incrementar el tamaño del sistema, pues hay que almacenar matrices de tamaño $L \times L$.

DPRM con correlación

Una vez validado el algoritmo en el caso de ruido blanco, procedemos a estudiar el sistema bajo la influencia de ruido correlacionado temporalmente del tipo $1/f^\beta$ (*power-law noise*). El capítulo anterior lo cerramos destacando la gran eficiencia del DPRM. Como contraparte, es necesario mencionar ahora que el problema correlacionado tiene una complejidad computacional mayor al requerir FFTs, bucles y comparaciones en todos los puntos de la red. Esto no supone un impedimento, pero sí que es necesario optimizar lo máximo posible el código, principalmente a nivel de memoria RAM, con el fin de que las simulaciones puedan realizarse en un tiempo *razonable* en el sistema de mayor tamaño posible. Con las mismas especificaciones que se mostraban en la Apartado 4.5, se recogen a continuación las diferencias entre ambos casos, para reflejar la importancia y gran salto técnico que supone la introducción de ruido correlacionado.

Tipo de Ruido	Estadística	Tiempo aprox.	Cores	Estado de RAM
Descorrelacionado	10^5	30 min	11	Sin limitaciones
Correlacionado	10^4	3 – 4 h	5	<i>Overflow</i>

Tabla 5.1: Se observa que la estadística baja claramente un orden de magnitud mientras que el tiempo de cómputo se multiplica por un factor de 6 – 8. El número de núcleos de paralelización se divide a menos de la mitad debido a que, a diferencia del primer caso, el ruido correlacionado presenta una alta demanda de recursos; al exceder la capacidad de la RAM (*overflow*), el sistema recurre a la memoria *swap*, lo que reduce drásticamente la velocidad de procesamiento y supone el principal *bottleneck* del proceso.

5.1 Implementación

5.1.1 Algoritmo de crecimiento

Tal y como se comenta en el Capítulo A, el algoritmo de crecimiento para la geometría elegida es similar al de la Ecuación (3.1), el siguiente fragmento del código lo muestra:

Listing 5.1: Algoritmo para la evolución del polímero en el caso de una red cuadrada.

```

1 [...]
2 for t in range(2, LENGTH):
3     E_next = np.full(X, np.inf, dtype=np.float64)
4     # Loop on spatial points
5     for x in nb.prange(0, t + 1):
6         if x == 0:

```

```

7         down_side = E_current[x] + Down_noise[t - 1, 0]
8         left_side = np.inf
9         elif x == t:
10            left_side = E_current[x - 1] + Left_noise[t - 1, x - 1]
11            down_side = np.inf
12         else:
13            down_side = E_current[x] + Down_noise[t - 1, x]
14            left_side = E_current[x - 1] + Left_noise[t - 1, x - 1]
15         E_next[x] = min(left_side, down_side)
16     [...]
```

Así, la ecuación que se está iterando es:

$$E(x, t + 1) = \min \left\{ E(x, t) + \eta_{DN}(x, t), E(x - 1, t) + \eta_{LN}(x - 1, t) \right\} \quad (5.1)$$

Sin más que reajustar los índices por el tipo de movimiento, la energía en un punto de la red evoluciona: o bien quedándose en la posición que estaba, lo que hemos denominado *hacia arriba*, o bien desplazándose en *diagonal*.

5.1.2 Introducción del ruido correlacionado

Nos situamos ahora en el punto más delicado de este TFG. En el Apartado A.1 se explica que en el modelo *on-bond* cada nodo de la red ahora tiene dos ruidos asociados en función de si el polímero proviene de debajo o de la izquierda, de ahí la nomenclatura en inglés. De este modo, los carriles que se aprecian en la Figura 5.1 están duplicados en el sentido de que a una posición podemos llegar mediante los dos movimientos en L recíprocos, es decir, *arriba + derecha* o *derecha + arriba*.

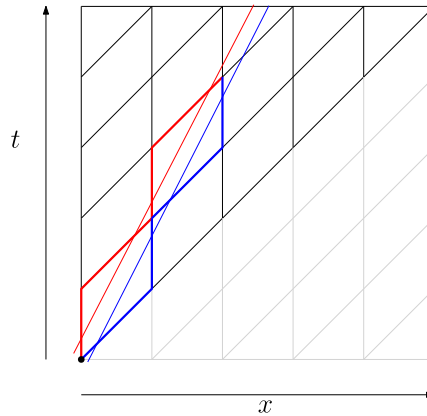


Figura 5.1: Ejemplo ilustrativo de la introducción del ruido correlacionado en el caso de una red cuadrada rotada. De manera similar a como se explicó en la Apartado 3.4.1 los carriles que en la Figura 3.4 se formaban paralelos a la dirección de crecimiento ahora son subdiagonales en la red. Esto complica la indexación del ruido ya que los vectores correlacionados debemos situarlos manualmente en la posición correspondiente de la red.

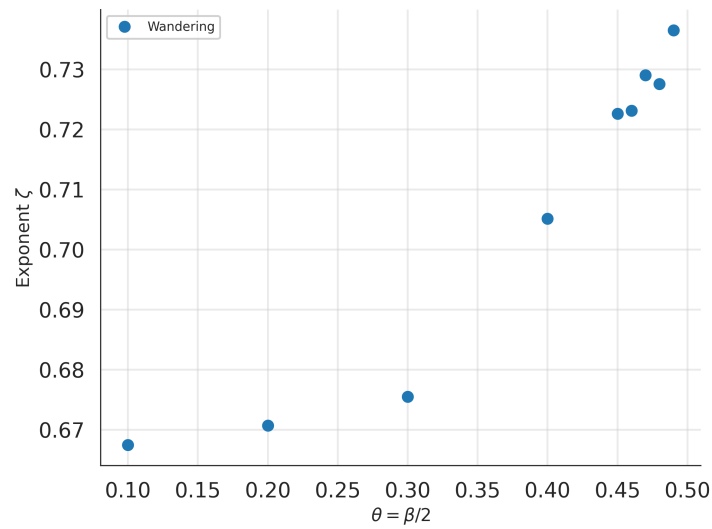
Así, dividimos el ruido en dos matrices, una para cada posibilidad del ruido y aprovechamos la forma triangular del problema para poder eliminar los valores que no se acceden. De este modo liberamos la mitad de la memoria, almacenando únicamente las posiciones que se visitan.

5.2 Evolución de los exponentes críticos

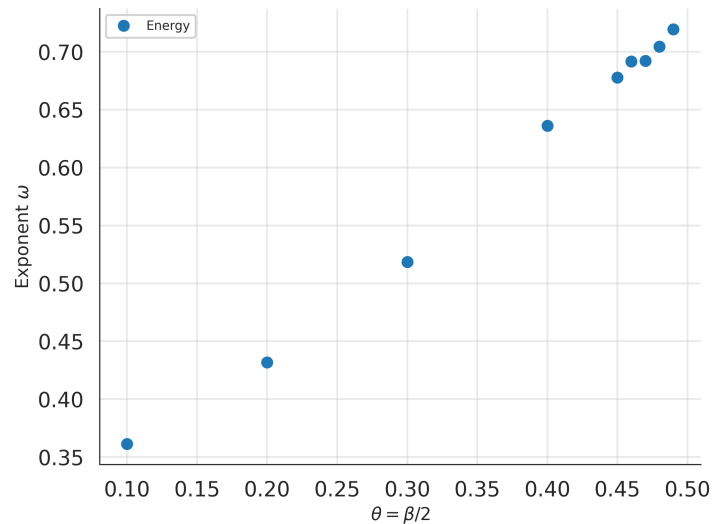
Tras validar que el sistema descorrelacionado recupera los valores canónicos (Capítulo 4), en esta sección analizaremos cómo evolucionan los exponentes críticos al introducir ruido correlacionado *power-law*. Para ello, hemos extraído los valores de los exponentes para correlaciones $\theta = \beta/2$ en el intervalo $[0, 1/2)$.

5.2.1 Exponente *wandering* y fluctuaciones de energía

En primer lugar, analizamos el impacto de la memoria temporal sobre la geometría de los caminos óptimos y su energía libre asociada, tomando como referencia el comportamiento del régimen descorrelacionado (Apartado 4.4). En la Figura 5.2 se presenta la evolución del exponente de *wandering* (ζ) y del exponente de fluctuación de energía (ω).



(a) Evolución de ζ .



(b) Evolución de ω .

Figura 5.2: Relación de los exponentes ζ y ω frente al parámetro de correlación θ .

Se aprecia claramente la dependencia de los exponentes a medida que aumenta la intensidad de la correlación en el ruido. Mientras que en el caso descorrelacionado encontrábamos que $\zeta = 2/3 \simeq 0,66$ y $\omega = 1/3 \simeq 0,33$, ahora para valores de correlación significativos observamos un aumento de ambos, llegando a $\zeta \simeq 0,75$ y $\omega \simeq 0,7$.

5.2.2 Ruptura de la Invarianza Galileana

Continuando con lo establecido en el marco teórico, analizamos a continuación qué ocurre con el exponente de rugosidad (Ecuación (4.3)) y, por ende, con la *Invarianza Galileana* (Ecuación (2.10)). La Figura 5.3 ilustra la evolución del parámetro α comparado simultáneamente con el exponente dinámico z .

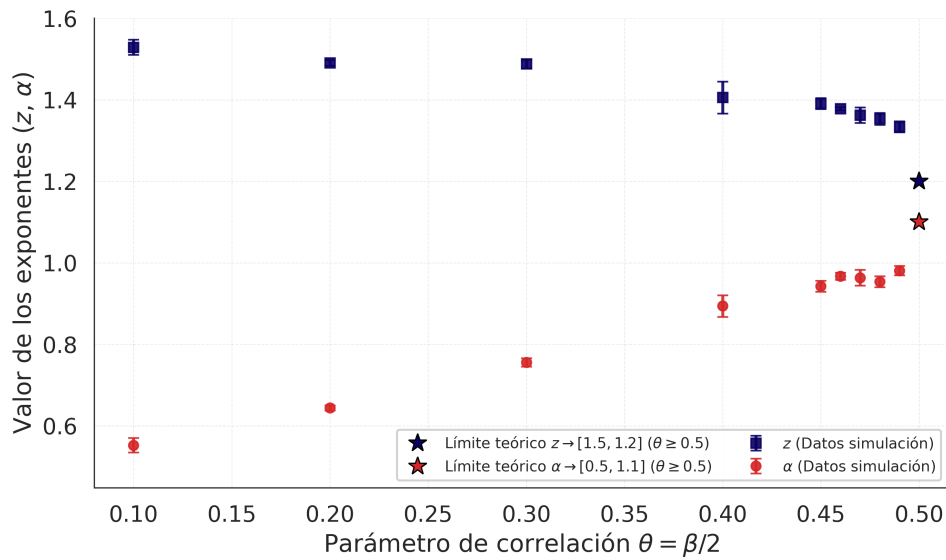


Figura 5.3: Evolución conjunta de los exponentes z y α frente a la intensidad de la correlación θ . Denotados por estrellas se indican los límites asintóticos teóricos ($z \rightarrow 1,2$, $\alpha \rightarrow 1,1$) obtenidos mediante aproximaciones analíticas y corroborados numéricamente para el régimen de correlación fuerte ($\theta \geq 0,5$)[28].

Es notable cómo los valores clásicos recuperados en el Capítulo 4 sufren una clara alteración. Los exponentes descorrelacionados $z = 3/2$ y $\alpha = 1/2$ decrecen y crecen, respectivamente, en cuanto la memoria temporal comienza a dominar el sistema. Observamos cómo para $\theta \lesssim 0,3$, el exponente dinámico se mantiene relativamente estable alrededor de $z \simeq 1,50 \pm 0,03$; sin embargo, para $\theta \geq 0,30$, comienza un descenso abrupto hasta acumularse cerca de $z \simeq 1,3$. De manera análoga, el exponente de *roughening* exhibe una clara tendencia asintótica hacia $\alpha \rightarrow 1$. Resulta pertinente recordar que, tal y como se introdujo previamente, la universalidad KPZ en el caso de correlación temporal ha demostrado ser frágil incluso ante distintos modelos equivalentes en la clase de universalidad KPZ [7]. Por ello, aunque existan ligeras discrepancias numéricas en la convergencia exacta, el comportamiento cualitativo y la tendencia hacia estos valores reproducen el comportamiento esperado ante la presencia de memoria temporal.

A la luz de estas divergencias, procedemos a examinar la validez de la *Invarianza Galileana*. El resultado de la suma de los exponentes empíricos se muestra en la Figura 5.4.

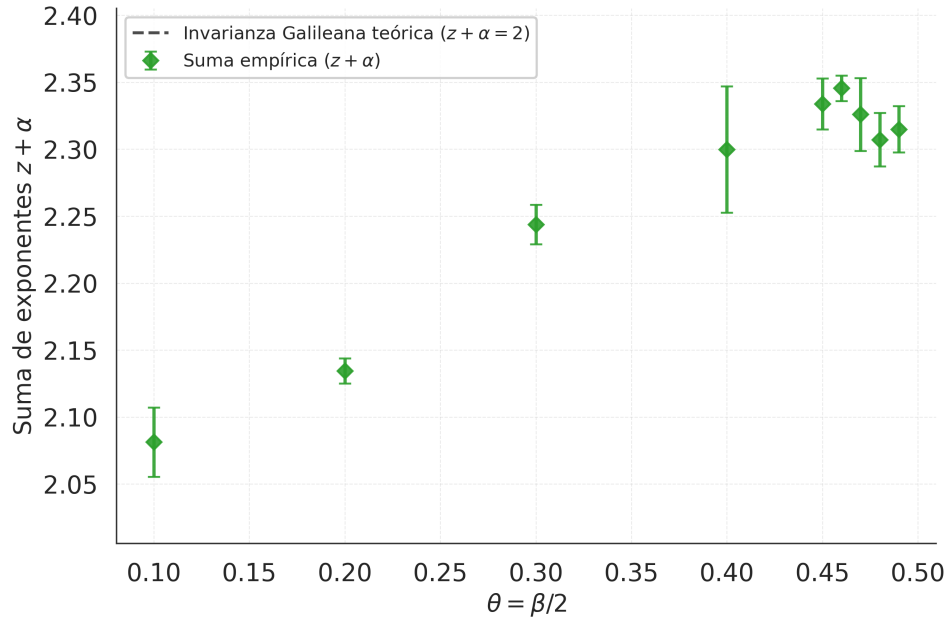


Figura 5.4: Evolución de la suma $\alpha + z$ frente a la intensidad de la correlación temporal. La línea discontinua marca la predicción de la Invarianza Galileana en el modelo clásico ($\alpha + z = 2$).

La relación teórica expresada en la Ecuación (2.10) queda explícitamente invalidada por la correlación del ruido. Así, se certifica que la relación $\alpha + z = 2$ se rompe ante la introducción de memoria en el sistema.

Esto lo habíamos anticipado previamente y puede verse justificado atendiendo a la lógica de la deducción de esta relación (Apartado B.1). En primer lugar, algo subyacente a la ecuación KPZ, y que no puede pasar desapercibido, es que el término no lineal $(\nabla h)^2$ introduce un término cruzado que se anula en la ecuación, permitiendo recuperar la superficie original para las coordenadas sin transformar. Esto, por ejemplo, la ecuación de Edwards-Wilkinson (Ecuación (2.7)) no lo satisface. Por otro lado, crítico en nuestro problema, es la suposición de ruido descorrelacionado temporalmente. En otro caso, no es posible recuperar del mismo modo la función de ruido y concluir el resultado.

Conclusiones

6.1 Discusión de los resultados

En este trabajo se ha logrado reproducir de manera fiel la fenomenología clásica del problema de [DPRM](#) sin correlación, recuperando los valores teóricos de los exponentes críticos y sus relaciones de escala canónicas. Sobre esta sólida validación, se ha introducido con éxito el caso de ruido correlacionado temporalmente del tipo $1/f^\beta$, un régimen notablemente menos explorado en la literatura, cuyo estudio constituía la motivación principal de esta memoria. Su análisis ha permitido caracterizar numéricamente los exponentes de la clase de universalidad [KPZ](#) con correlación y extraer resultados de gran interés.

En el ámbito computacional, la implementación del método de *Transfer Matrix* ha demostrado ser una herramienta altamente adaptable. La optimización planteada mediante la transformación de coordenadas a una red cuadrada rotada ha resultado ser un factor crítico: al reducir a la mitad el dominio espacial de accesibilidad y simplificar las dependencias temporales, el requerimiento de almacenamiento matricial disminuye drásticamente. Esta maniobra ha sido la clave para alcanzar sistemas de tamaño $L = 2^{13} = 8192$, operando en los límites de capacidad de la máquina empleada.

Desde una perspectiva fenomenológica, se ha corroborado la estricta dependencia de los exponentes críticos con la intensidad de la memoria del ruido, ratificando cualitativamente el abandono de la universalidad ordinaria, tal y como se esperaba [\[23\]](#). Más importante aún, los resultados evidencian la vulnerabilidad de la Invarianza Galileana frente a este tipo de perturbaciones de largo alcance. El hecho de que las simulaciones sigan la tendencia dictada por el marco continuo pero difieran cuantitativamente de los límites teóricos asintóticos refuerza la hipótesis de que la clase [KPZ](#) con correlación es frágil [\[7\]](#) frente a detalles microscópicos.

6.2 Trabajo a futuro

Este estudio abre diversas vías de investigación que invitan a ser exploradas con mayor profundidad. Algunas de ellas han comenzado a abordarse durante la recta final de este trabajo, arrojando resultados preliminares prometedores, mientras que otras conforman el núcleo de desarrollos futuros.

En primer lugar, respecto a la optimización de los recursos de cómputo, se ha planteado la transición hacia una cuantización del desorden y la energía mediante aritmética de enteros. Operar de este modo mitigaría los cuellos de botella asociados a la memoria y aceleraría el

cálculo vectorial iterativo. A nivel teórico, se ha demostrado formalmente que truncar y escalar la serie temporal preserva el comportamiento asintótico de la [PSD](#). Para un factor de escala decimal k , el error de redondeo resulta analíticamente irrelevante en el límite. Una estimación preliminar conduce a pensar que con $k \in \{3, 4\}$ cifras significativas puede garantizarse un equilibrio óptimo entre precisión física y eficiencia computacional.

Más allá de las mejoras algorítmicas, es intrínseco al estudio de los fenómenos críticos la necesidad de someter los observables a un riguroso análisis de escalado por tamaño finito. Aprovechando la arquitectura desarrollada y las optimizaciones planteadas, la migración del código a entornos de computación de alto rendimiento permitirá simular órdenes de magnitud superiores, reportando mejores resultados.

Finalmente, una de las vías más motivadoras y profundas reside en el estudio del exponente espectral en los [DPRM](#). El escalado anómalo en este modelo es un problema abierto. Uno de los objetivos principales consiste en definir una forma de extraer y relacionar el valor de este exponente en el modelo de polímeros dirigidos con su homólogo en [KPZ](#). Actualmente se dispone de varias hipótesis que están siendo estudiadas con el fin de intentar dar explicación a este fenómeno.

Reflexión final

Este trabajo ha supuesto un reto en multitud de aspectos, tanto académicos como personales. Conceptos fuera del plan de estudios, como son las clases de universalidad, ecuaciones esto-cásticas y modelos computacionales, entre otros, suponen un desafío en sí mismo que me ha enseñado a interiorizar nociones nuevas y a profundizar. Quiero destacar el magnífico trabajo de mis tutores, Juanma y Enrique, que han sido capaces de enseñarme una inmensidad de conceptos y métodos a los que era totalmente ajeno y han conseguido que me interese por ámbitos totalmente novedosos. Añadir también a este aprendizaje la forma de proceder en investigación, el trabajo que requiere y los grandes esfuerzos colectivos que exigen los más pequeños avances. Puede parecer algo trivial visto desde fuera, pero sin duda alguna es uno de los recursos más valiosos que me llevo.

Descubrir todo un universo dentro de lo que hasta ahora nos es conocido es todo un privilegio del que, probablemente y por desgracia, no todos los alumnos que concluyen el Grado pueden disfrutar. Más aun, personas que han decidido volcar su vida en el estudio de la preciosa intersección entre las Matemáticas y la Física tenemos que abandonar nuestra *alma mater*, por la imposibilidad de continuar aquí nuestro camino, deseando poder volver en un futuro.

Así pues, a lo largo de las páginas que nos preceden no solo se ha plasmado el estudio analítico y computacional de un problema de la física estadística, sino la maduración que exige la culminación de esta etapa universitaria en la Universidad de Cantabria. Más allá de los *papers* revisados, las horas de programación y las innumerables correcciones, este documento es el reflejo de unas capacidades mucho más profundas, como son las de entender, cuestionar y, sin duda alguna, la más importante: la de *fallar*. En cierto modo, fuera cual fuere el tema elegido, hubiera fructificado un trabajo similar bajo el punto de vista académico. Sin embargo, la elaboración de esta memoria ha estado plagada de errores de compilación, callejones sin salida y cuestiones que tardaron semanas en encontrar una explicación. Se ratifica así la célebre perspectiva de Thomas Alva Edison: «No fracasé mil veces. La bombilla fue un invento con mil pasos»¹.

Concluyo por tanto haciendo mención de lo bonito que ha sido este camino para mí y, probablemente, lo poco que lo he logrado transmitir en estas páginas. Siempre que leemos un libro, vemos un discurso o hablamos sobre algo, son muchas más las palabras que nunca salieron de nuestro pensamiento que las que sí, y son esas mismas las que dan sentido a nuestra

¹Aprovechando la licencia de estas últimas líneas más informales, me gustaría recordar que, si bien Edison patentó y comercializó la bombilla, inventores previos como Humphry Davy (con su lámpara de arco en 1800) y Joseph Swan ya habían desarrollado prototipos viables. El mayor reto de estos modelos primigenios era la efímera duración de sus filamentos, problema que Edison supo optimizar. La ciencia, al igual que este trabajo, siempre se construye iterando sobre los pasos de otros y es conveniente no olvidar este carácter colectivo que permite al *Conocimiento* avanzar.

existencia y condicionan lo que somos. Así, todas las frases que borré, las ideas que deseché y los problemas en los que fallé han sido una parte necesaria e innegociable de este camino y son las protagonistas de lo que soy *Hoy* y seré *Mañana*.

Bibliografía

- [1] A. Campuzano Solórzano, *TFG-física: Repositorio del Trabajo de Fin de Grado*, <https://github.com/albertocampuzanosolorzano/TFG-fisica>, 2026 (cit. en pág. 2).
- [2] O. Cheong, *Ipe extensible drawing editor*, Versión 7.2.28 [Software de dibujo vectorial], 2026 (cit. en pág. 2).
- [3] A.-L. Barabási y H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, 1995 (cit. en pág. 3).
- [4] T. Halpin-Healy e Y.-C. Zhang, “Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics”, *Physics Reports*, vol. 254, n.º 4, págs. 215-414, 1995. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00087-J](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00087-J) (cit. en págs. 3, 9, 14, 25).
- [5] F. Family y T. Vicsek, “Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 18, n.º 2, pág. L75, feb. de 1985. DOI: [10.1088/0305-4470/18/2/005](https://doi.org/10.1088/0305-4470/18/2/005) (cit. en págs. 4, 8).
- [6] M. Kardar, G. Parisi e Y.-C. Zhang, “Dynamic Scaling of Growing Interfaces”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, págs. 889-892, 9 mar. de 1986. DOI: [10.1103/PhysRevLett.56.889](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.889) (cit. en pág. 4).
- [7] E. Rodríguez-Fernández, A. Alés, J. Martín-Álvarez y J. M. López, “Fragility of Kardar-Parisi-Zhang universality class in the presence of temporally correlated noise”, *Phys. Rev. E*, vol. 110, pág. 024 104, 2 ago. de 2024. DOI: [10.1103/PhysRevE.110.024104](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.024104) (cit. en págs. 5, 15, 34, 37).
- [8] A. Alés y J. M. López, “Faceted patterns and anomalous surface roughening driven by long-range temporally correlated noise”, *Phys. Rev. E*, vol. 99, pág. 062 139, 6 jun. de 2019. DOI: [10.1103/PhysRevE.99.062139](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.062139) (cit. en pág. 5).
- [9] J. J. Ramasco, J. M. López y M. A. Rodríguez, “Generic Dynamic Scaling in Kinetic Roughening”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, págs. 2199-2202, 10 mar. de 2000. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.2199](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2199) (cit. en págs. 5, 9).
- [10] S. Chatterjee, *Existence of stationary ballistic deposition on the infinite lattice*, 2022. arXiv: [2110.10294](https://arxiv.org/abs/2110.10294) [math.PR] (cit. en pág. 8).
- [11] T. Sudijono, *Fluctuation Bounds for the Restricted Solid-on-Solid Model of Surface Growth*, 2025. arXiv: [2304.07160](https://arxiv.org/abs/2304.07160) [math.PR] (cit. en pág. 8).
- [12] R. Jullien y R. Botet, “Scaling properties of the surface of the Eden model in $d=2, 3, 4$ ”, English, *Journal of physics. A, Mathematical and general*, vol. 18, n.º 12, págs. 2279-2287, 1985 (cit. en pág. 8).
- [13] H. P. Yockey y T. Symposium on Information Theory in Biology Gatlinburg, “Symposium on information theory in biology, Gatlinburg, Tennessee, October 29-31, 1956”, 1958 (cit. en pág. 9).

- [14] F. Manin, É. Roldán y B. Schweinhart, “Topology and Local Geometry of the Eden Model”, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 69, n.º 3, págs. 771-799, 2023. DOI: [10.1007/s00454-022-00474-w](https://doi.org/10.1007/s00454-022-00474-w) (cit. en pág. 10).
- [15] S. F. Edwards y D. R. Wilkinson, “The Surface Statistics of a Granular Aggregate”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1982 (cit. en pág. 10).
- [16] E. Hopf, “The partial differential equation $u_t + u u_x = \mu x x$ ”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, n.º 3, págs. 201-230, 1950. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302> eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160030302> (cit. en pág. 12).
- [17] J. D. Cole, “On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics”, *Quart. Appl. Math.*, vol. 9, n.º 3, págs. 225-236, 1951. DOI: [10.1090/qam/42889](https://doi.org/10.1090/qam/42889) (cit. en pág. 12).
- [18] U. C. Täuber, “Dynamic renormalization group”, en *Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior*. Cambridge University Press, 2014, págs. 171-206 (cit. en pág. 13).
- [19] M. Kardar, “Replica Bethe ansatz studies of two-dimensional interfaces with quenched random impurities”, *Nuclear Physics B*, vol. 290, págs. 582-602, 1987. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(87\)90203-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90203-3) (cit. en pág. 13).
- [20] É. Brunet y B. Derrida, “Probability distribution of the free energy of a directed polymer in a random medium”, *Phys. Rev. E*, vol. 61, págs. 6789-6801, 6 jun. de 2000. DOI: [10.1103/PhysRevE.61.6789](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6789) (cit. en págs. 13, 28).
- [21] D. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning* (Addison Wesley series in artificial intelligence). Addison-Wesley, 1989 (cit. en pág. 13).
- [22] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt y M. P. Vecchi, “Optimization by Simulated Annealing”, *Science*, vol. 220, n.º 4598, págs. 671-680, 1983. DOI: [10.1126/science.220.4598.671](https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671) eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.220.4598.671> (cit. en pág. 13).
- [23] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar e Y.-C. Zhang, “Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth”, *Phys. Rev. A*, vol. 39, págs. 3053-3075, 6 mar. de 1989. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.3053](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.3053) (cit. en págs. 15, 37, vii).
- [24] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, págs. 381-384, 4 jul. de 1987. DOI: [10.1103/PhysRevLett.59.381](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381) (cit. en pág. 18).
- [25] J. W. Cooley y J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, *Mathematics of Computation*, vol. 19, n.º 90, págs. 297-301, 1965. DOI: [10.1090/s0025-5718-1965-0178586-1](https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1965-0178586-1) (cit. en pág. 19).
- [26] C. A. Tracy y H. Widom, “Level-spacing distributions and the Airy kernel”, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 159, n.º 1, págs. 151-174, 1994 (cit. en pág. 28).
- [27] M. Prähofer y H. Spohn, “Universal Distributions for Growth Processes in $1 + 1$ Dimensions and Random Matrices”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, págs. 4882-4885, 21 2000. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.4882](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4882) (cit. en pág. 28).

- [28] I. G. Szendro, J. M. López y M. A. Rodríguez, “Localization in disordered media, anomalous roughening, and coarsening dynamics of faceted surfaces”, *Phys. Rev. E*, vol. 76, pág. 011 603, 1 jul. de 2007. DOI: [10.1103/PhysRevE.76.011603](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.011603) (cit. en pág. 34).

APÉNDICES

Geometría de la red

A.1 Red cuadrada rotada 45°

Con el fin de evitar la complejidad de indexación de la red rectangular se propone una geometría distinta. En este caso consideramos una red de dimensiones $L + 1 \times L$, es decir, un *cuadrado* rotado 45 grados. Al igual que se ha explicado antes, el propio movimiento restringe la mitad del cuadrado, por lo que al representarlo en la Figura A.1 podemos observar que la geometría descrita es un triángulo:

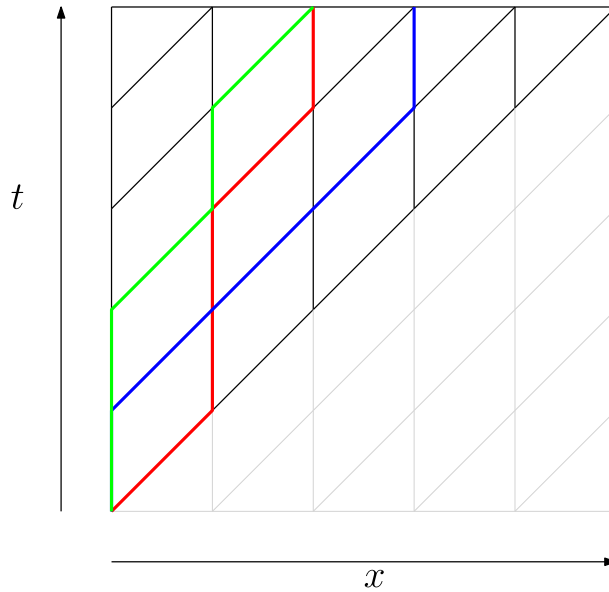


Figura A.1: Representación de la red cuadrada rotada. En color verde, azul y rojo se representan posibles trayectorias en la geometría cuadrada.

En este caso, ya no tenemos los movimientos que vimos en el caso de la red rectangular. El polímero avanza hacia la derecha, desplazándose de $(x, t) \rightarrow (x + 1, t + 1)$ o se queda en la misma posición $(x, t) \rightarrow (x, t + 1)$. Desde el punto de vista del algoritmo de crecimiento este es el caso inmediato, pues en cada paso accedemos a todos los nodos disponibles de la red, al contrario que en el caso rectangular, donde nos movemos de pares a impares y viceversa. Así pues, como se muestra en el Código 5.1, la ecuación recursiva de crecimiento del polímero es prácticamente idéntica a la planteada en la Ecuación (3.1) por el método de *Transfer Matrix*, ajustando el índice a los movimientos posibles.

Como contraparte, la introducción del ruido es mucho más laboriosa. Los puntos invariantes ahora serán aquellos en los que antes representaban moverse en *zig-zag*. Podemos observar que uno de los movimientos lo conservamos, en este caso *moverse hacia la derecha*, por lo que comparando podemos inferir que ahora, los movimientos *arriba + derecha* o *derecha + arriba* son los que devuelven al polímero a una posición equivalente. El siguiente ejemplo muestra la situación descrita:

Ejemplo A.1.1. Imaginemos ahora que tenemos una sección triangular de un tablero de ajedrez. El tipo de movimientos que dejan la posición fija serían la *L* que realiza el caballo en dicho juego. De este modo, correlacionamos $(x, t) \rightarrow (x + 1, t + 2), (x + 2, t + 4) \dots$

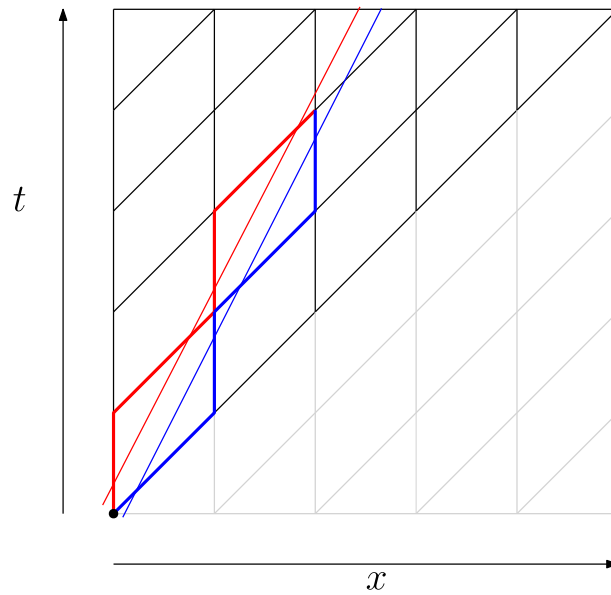


Figura A.2: Ejemplo ilustrativo de la introducción del ruido correlacionado en el caso de una red cuadrada rotada. Los carriles que en la Figura 3.4 se formaban paralelos a la dirección de crecimiento ahora son subdiagonales en la red. Esto complica la implementación del ruido ya que los vectores correlacionados debemos situarlos manualmente en la posición correspondiente de la red, tal y como se muestra en el esquema. Esta disposición se aplica a todos los puntos de la red aunque en el diagrama solo se han expuesto para el punto central, con el fin de evitar sobrecargar la imagen.

Demostraciones

B.1 Invarianza Galileana

En la Ecuación (2.10) introdujimos la *Invarianza Galileana*. A continuación, demostramos esta propiedad. [23]

Aplicando la transformación de coordenadas $x' = x + \lambda vt$, $h' = h + vx$ y dejando $t' = t$. Partimos de la ecuación

$$\partial_{t'} h' = \nu \nabla'^2 h' + \frac{\lambda}{2} (\nabla' h')^2 + \eta(x', t') \quad (\text{B.1})$$

sustituimos y desarrollamos cada término, haciendo uso de que $\nabla_{x'} = \nabla_x$, $\partial_{t'} = \partial_t + \lambda v \nabla_x$, $\nabla(vx) = v$ y $\partial_t(vx) = 0$:

$$(\partial_t + \lambda v \nabla)(h + vx) = \nu \nabla^2(h + vx) + \frac{\lambda}{2} (\nabla(h + vx))^2 + \eta(x + \lambda vt, t) \quad (\text{B.2})$$

$$\partial_t h + \lambda v \nabla h + \lambda v^2 = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h + v)^2 + \eta(x + \lambda vt, t) \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_t h + \lambda v \nabla h + \lambda v^2 = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} ((\nabla h)^2 + 2v \nabla h + v^2) + \eta(x + \lambda vt, t) \quad (\text{B.4})$$

$$\partial_t h + \lambda v \nabla h + \lambda v^2 = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \lambda v \nabla h + \frac{\lambda}{2} v^2 + \eta(x + \lambda vt, t) \quad (\text{B.5})$$

Como se puede observar, el término cruzado $\lambda v \nabla h$ se cancela y reordenando la expresión resultante, obtenemos:

$$\partial_t h = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x + \lambda vt, t) - \frac{\lambda}{2} v^2 \quad (\text{B.6})$$

El último término es una constante que se puede absorber con otro cambio de variable. Sin embargo, queda pendiente la cuestión de la función de correlación. Para que se tenga la invarianza, debemos tener el mismo ruido que originalmente. Tomando dos puntos en el sistema transformado tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \eta'(x_1, t_1) \eta'(x_2, t_2) \rangle &= \langle \eta(x_1 + \lambda vt_1, t_1) \eta(x_2 + \lambda vt_2, t_2) \rangle \\ &= F(x_1 - x_2 + \lambda v(t_1 - t_2), t_1 - t_2) \\ &= F(\Delta x + \lambda v \Delta t, \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Hasta aquí podemos llegar sin información adicional sobre la función de ruido original. Si suponemos una función descorrelacionada temporalmente del tipo $F(\Delta x, \Delta t) = F(\Delta x)\delta(\Delta t)$, entonces la expresión se evalúa de forma exacta:

$$\begin{aligned} F(\Delta x + \lambda v \Delta t, \Delta t) &= F(\Delta x + \lambda v \Delta t)\delta(\Delta t) \\ &= F(\Delta x + \lambda v \cdot 0)\delta(\Delta t) \\ &= F(\Delta x)\delta(\Delta t) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Donde en el segundo paso hemos hecho uso de la propiedad de la delta de Dirac $f(\Delta t)\delta(\Delta t) = f(0)\delta(\Delta t)$.

De este modo, recuperamos la función de ruido original y por tanto, bajo la suposición de ruido descorrelacionado temporalmente, la ecuación KPZ es invariante bajo la transformación de coordenadas de Galileo.

B.2 Transformada de Cole-Hopf

Proposición B.2.1. *En el contexto de KPZ, mediante el cambio de variable:*

$$Z(x, t) = \exp\left(\frac{\lambda}{2\nu}h(x, t)\right) \tag{B.9}$$

puede linealizarse.

Demostración. Para encontrar la ecuación de evolución de Z , derivamos respecto al tiempo utilizando la regla de la cadena clásica:

$$\partial_t Z = \frac{\lambda}{2\nu} Z \partial_t h \tag{B.10}$$

Sustituimos $\partial_t h$ por la ecuación KPZ original ($\partial_t h = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta$):

$$\partial_t Z = \frac{\lambda}{2\nu} Z \left[\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(x, t) \right] \tag{B.11}$$

Expandiendo el término del paréntesis derecho:

$$\partial_t Z = \underbrace{\frac{\lambda}{2} Z \nabla^2 h}_{\text{Trmino A}} + \underbrace{\frac{\lambda^2}{4\nu} Z (\nabla h)^2}_{\text{Trmino B}} + \frac{\lambda}{2\nu} Z \eta(x, t) \tag{B.12}$$

Por otro lado, calculamos las derivadas espaciales de Z para relacionarlas con los términos A y B. La primera derivada espacial (gradiente) es:

$$\nabla Z = \frac{\lambda}{2\nu} Z \nabla h \tag{B.13}$$

Calculamos ahora el Laplaciano ($\nabla^2 Z = \nabla \cdot \nabla Z$) aplicando la regla del producto:

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z &= \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{2\nu} Z \nabla h \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\nu} [(\nabla Z) \cdot (\nabla h) + Z(\nabla^2 h)]\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Sustituimos ∇Z por su expresión en función de h :

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z &= \frac{\lambda}{2\nu} \left[\left(\frac{\lambda}{2\nu} Z \nabla h \right) \cdot (\nabla h) + Z \nabla^2 h \right] \\ \nabla^2 Z &= \frac{\lambda^2}{4\nu^2} Z (\nabla h)^2 + \frac{\lambda}{2\nu} Z \nabla^2 h\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Multiplicamos toda la expresión por ν para facilitar la comparación con la ecuación (B.12):

$$\nu \nabla^2 Z = \frac{\lambda^2}{4\nu} Z (\nabla h)^2 + \frac{\lambda}{2} Z \nabla^2 h \quad (\text{B.16})$$

Observamos que el lado derecho de la ecuación (B.16) es exactamente la suma de los términos A y B en la ecuación (B.12). Por lo tanto, podemos reescribir la evolución temporal de Z como:

$$\partial_t Z = \nu \nabla^2 Z + \frac{\lambda}{2\nu} \eta(x, t) Z \quad (\text{B.17})$$

□

B.3 Transformada de Fourier

Proposición B.3.1. Sean $s(T) = |T|^{-2\theta} = |t - t'|^{-2\theta}$, entonces $S(\omega) = \mathcal{F}(s(T)) = \frac{2\Gamma(\beta+1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|\omega|^{\beta+1}}$.

Demostración. Para facilitar la notación durante el desarrollo, llamemos $\beta = 2\theta$. Partiendo de la definición continua de la Transformada de Fourier (definición 3.2.1):

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |T|^\beta e^{-i\omega T} dT \quad (\text{B.18})$$

Haciendo uso de la fórmula de Euler ($e^{-i\omega T} = \cos(\omega T) - i \sin(\omega T)$), podemos separar la integral en su parte real e imaginaria:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |T|^\beta \cos(\omega T) dT - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |T|^\beta \sin(\omega T) dT \quad (\text{B.19})$$

Dado que $|T|^\beta$ es una función par (simétrica respecto al origen) y el seno es una función impar, el producto de ambas en el segundo término es una función impar. Por tanto, su integral definida sobre el intervalo simétrico $(-\infty, \infty)$ se anula.

Por otro lado, el producto con el coseno en el primer término resulta en una función par, lo que nos permite restringir el dominio de integración a la mitad positiva y multiplicar por dos:

$$S(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} T^\beta \cos(\omega T) dT \quad (\text{B.20})$$

Para resolver esta integral, aplicamos el cambio de variable $u = |\omega|T$. Esto implica que $dT = \frac{du}{|\omega|}$ y $T = \frac{u}{|\omega|}$:

$$S(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{|\omega|} \right)^\beta \cos(u \cdot \text{sgn}(\omega)) \frac{du}{|\omega|} \quad (\text{B.21})$$

Como el coseno vuelve a ser una función par, $\cos(u \cdot \text{sgn}(\omega)) = \cos(u)$. Agrupando los términos dependientes de ω y extrayéndolos del operador integral, obtenemos la ley de potencias buscada:

$$S(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\omega|^{\beta+1}} \int_0^\infty u^\beta \cos(u) du \quad (\text{B.22})$$

Llegados a este punto, la dependencia espectral $1/|\omega|^{\beta+1}$ ya ha quedado explícitamente demostrada. El término restante es una integral impropia independiente de ω . Haciendo uso de la función Gamma de Euler podemos evaluarla, dando como resultado analítico $\Gamma(\beta+1) \sin(-\pi\beta/2)$.

Absorbiendo el factor trigonométrico, recuperamos la estructura exacta de la proposición:

$$S(\omega) \propto \frac{2\Gamma(\beta+1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|\omega|^{\beta+1}} \quad (\text{B.23})$$

□

Proposición B.3.2. Sean C_k los coeficientes de Fourier de una serie originalmente ruido blanco en el dominio temporal, el factor $F_k = 1/\omega^{\beta/2}$ escala la sucesión original a otra con coeficientes $C_{k'}$ con correlación β

Demostración. Para llegar al resultado, desarrollemos la relación $C_{k'} \propto 1/\omega^{\beta/2}$, recordando que $|C_k|^2 = 1$

$$|C_{k'}|^2 \propto \frac{1}{\omega^\beta} \Leftrightarrow |C_k F_k|^2 \propto \frac{1}{\omega^\beta} \Leftrightarrow |F_k|^2 \propto \frac{1}{\omega^\beta} \Leftrightarrow F_k \propto \frac{1}{\omega^{\beta/2}} \quad (\text{B.24})$$

□